



ქათავან ცარცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნწერება

სტატისტიკა და ალბათობა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამის (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

■ ქეთევან ცერცვაძე

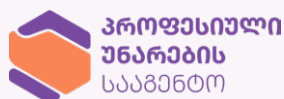
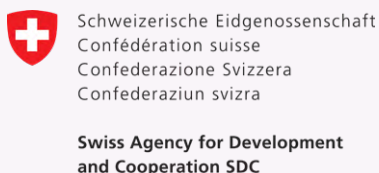
■ ევგენი გუგულაშვილი

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: ზურაბ ვახანია

გრაფიკული დიზაინერი: ვერა პაპასკირი

საავტორო უფლებები დაცულია



მათემატიკური წიგნიერება

1 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 1. მონაცემთა ანალიზი

- 1.1. მონაცემების შეგროვება
- 1.2. მონაცემების კლასიფიკაცია
- 1.3. მონაცემების წარმოდგენა
- 1.4. ჰისტოგრამა, დაჯგუფებული მონაცემები
- 1.5. მედიანა, მოდა, საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი
- 1.6. მონაცემთა განაწილების ფორმები

2 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 2. მოდელირება ფუნქციით

- 2.1. კორელაცია, მისადაგების წრფე
- 2.2. ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილი
- 2.3. პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი

3 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 3. კომბინატორიკა

- 3.1. ვარიანტების დათვლა, ვარიანტების დათვლის გამრავლების წესი
- 3.2. ფაქტორიალი, გადანაცვლება, წყობა, ჯუფთება

4 თემა – კომპლექსური დავალება

თემა 4. ხდომილობის ალბათობა

- 4.1. ხდომილობა; ხდომილობის ალბათობის განმარტება
- 4.2. ორი ხდომილობის ურთიერთდამოკიდებულება

მათემატიკური წიგნიერება



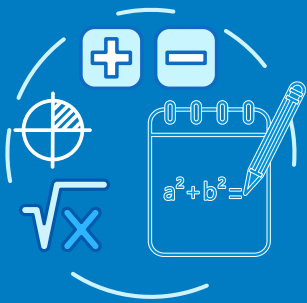
თავი V

სტატისტიკა და ალბათობა

თანამედროვე სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალ ინჟინრებსა და მეცნიერებს, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკაში ძლიერი საფუძველი უნდა ჰქონდეთ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რაც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველია, რაც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

I. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

ყოველდღიურ ცხოვრებაში სატელევიზიო საშუალებების თუ ინტერნეტ მედიის საშუალებით ჩვენ ვეცნობით სხვადასხვა კვლევის შედეგს, რომელიც წარმოდგენილია გრაფიკულად, სიტყვიერად თუ ცხრილების მეშვეობით.

იმისათვის, რომ ვიცოდეთ ინფორმაციის სწორად შევძლოთ გაგება, აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორ ხდება კვლევის ორგანიზება, საკვლევი კითხვის დასმა, ასევე ინფორმაციის მაძიებელი კითხვების დასმა, მონაცემების შეგროვება, ანალიზი და ინტერპრეტაცია.

კომპლექსური დავალება



საკვანძო კითხვა:

- როგორ არის შესაძლებელი კვლევის დაგეგმვა და მონაცემების ინტერპრეტირება?

მონაცემების შეგროვების ერთ-ერთი მეთოდი არის კითხვარის გამოყენება, საკვლევი კითხვის ჩამოყალიბების შემდეგ, დგება კითხვების ჩამონათვალი, რომელსაც გამოკითხულებმა პასუხი უნდა გასცენ. შეგროვებული ინფორმაციის საფუძველზე კეთდება დასკვნა.



თქვენი დავალება

მოიფიქრეთ თქვენთვის საინტერესო საკითხი და ჩამოაყალიბეთ საკვლევი კითხვა. საკვლევ კითხვასთან დაკავშირებით შეადგინეთ კითხვარი და დააორგანიზეთ კვლევა; გამოკითხვა შეგიძლიათ აწარმოოთ [Microsoft Forms](#) (Microsoft Forms – კითხვარის შედგენა, ვიდეო ინსტრუქცია) ან Google Forms-ის მეშვეობით ინტერნეტით;

დავალება წარმოადგინეთ თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით; კითხვები და შედეგები გადაიტანეთ საპრეზენტაციო ფაილში:

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რას ეხებოდა თქვენი საკვლევი საკითხი? რატომ იყო საინტერესო თქვენთვის?
- ვის მოიაზრებთ სამიზნე აუდიტორიად?
- როგორ დააორგანიზეთ კვლევა? რამდენად ობიექტურად და მიუკერძოებლად წარმართეთ პროცესი?
- როგორ წარმოადგინეთ კვლევის შედეგები? რამდენი სხვადასხვა მეთოდით არის შესაძლებელი?
- მონაცემების მოწესრიგების შემდეგ, რა აღმოაჩინეთ და დაადგინეთ კვლევის შედეგად?

დამხმარე ნიმუში დავალების პირობის გასააზრებლად

დავუშვათ, სკოლის მასწავლებლებმა ან განათლების სამინისტრომ გადაწყვიტა მოსწავლეების გამოკითხვა სასკოლო ცხოვრების შიდა კლიმატის დასადგენად. ამისათვის, მათ უნდა შეადგინონ კითხვარი.





მას შემდეგ, რაც მკვლევარი გადაწყვეტს, რომელი საკითხის შესწავლა სურს, კვლევის დაწყებამდე მას უნდა ჰქონდეს ცოდნა, როგორ აწარმოოს კვლევა სწორად.

- როგორ ხდება მონაცემების შეგროვება?
- რა ტიპის მონაცემები არსებობს?
- რა წესით უნდა შევადგინოთ საკვლევი ჯგუფი?
- რა რაოდენობის მონაცემია საკმარისი, რომ დავწეროთ დასკვნა?
- რისთვის არის საჭირო დასკვნა?
- რა ხდის მონაცემების წარმოდგენას ეფექტურს?

პითხვარი

1. რომელ კლასში სწავლობთ?

2. თქვენი სქესი: მდედრობითი მამრობითი

3. საშუალოდ რამდენ საათს ატარებთ სკოლაში ყოველდღე?

4. როგორ ფიქრობთ, აქვს თუ არა ბიჭს გოგოსთან შედარებით მეტი უფლებები?

5. ეთანხმებით თუ არა: მოსწავლეს, რომელიც კარგად სწავლობს, მეტ ყურადღებას აქცევენ

6. 10 ქულიანი სისტემით, როგორ შეაფასებდით სკოლას?

ვეთანხმები

არ ვეთანხმები

ნაწილობრივ ვეთანხმები

როგორც ნიშუმიდან ჩანს, არსებობს სხვადასხვა ტიპის მონაცემი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ სკოლაში არსებული კლიმატი, ახალგაზრდების დამოკიდებულებები თუ ხედვები გარკვეული საკითხის მიმართ.

თემა 1. მონაცემთა ანალიზი

1.1. მონაცემების შეგროვება

სტატისტიკა – არის მეცნიერება მონაცემების შეგროვების, დამუშავების, ანალიზის და მასზე დაყრდნობით დასკვნების გაკეთების შესახებ.

სტატისტიკას იყენებს ბიზნესი, სპორტი, მეცნიერება, მთავრობა და ა.შ.

სტატისტიკური კვლევის განხორციელებისთვის ყოველთვის არის გამოკვეთილი სამიზნე აუდიტორია, რომელთა შესახებაც არის აუცილებელი ინფორმაციის შეგროვება და დამუშავება, რათა შემდეგ გაკეთდეს დასკვნა, ეფექტური გადაწყვეტილების მიღება, საფუძვლიანი ვარაუდების გაკეთება, არსებული სიტუაციის ანალიზი.

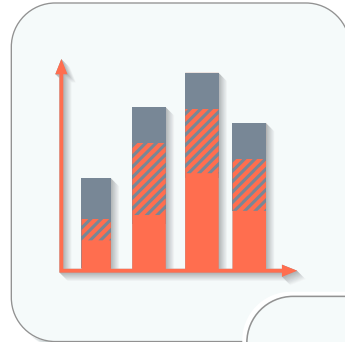
არსებობს გამოკითხვის წარმოების სხვადასხვა მეთოდი.

მაგალითად, ინფორმაციის მოგროვება ხდება ხალხის გამოკითხვით. თუ უნდა გამოიკითხოთ, თბილისის ყველა მოსახლე, ვიტყვით, რომ უნდა გამოიკითხოთ სრული **პოპულაცია**. როდესაც გამოკითხვის დროს უნდა გამოიკითხოთ სამიზნე (გამოსაკითხი) აუდიტორიის **თითოეული** წევრი, ამბობენ, რომ ხდება **აღწერა**. ხშირად, კვლევებისას, გამოიკითხავენ მცირე ჯგუფს, რასაც ეწოდება შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვა და შემდეგ, გარკვეული წესების დაცვით, ინფორმაციის განზოგადება სრული პოპულაციისთვის.

შერჩევითი მეთოდით წარმოებული გამოკითხვის დროს, გამოიკითხავენ პოპულაციის მცირე ჯგუფს.

მცირე ჯგუფი უნდა შეირჩეს ისე, რომ აღწერდეს სრულ პოპულაციას. მცირე ჯგუფის მონაცემების ანალიზით დასკვნა კეთდება სრული პოპულაციისთვის.

შერჩევითი ჯგუფის გამოკითხვისას პროცესი მიმდინარეობს სწრაფად და საორგანიზაციოდ იაფია, თუმცა აღწერასთან შედარებით არ არის დეტალური და ცდომილება შედარებით მაღალია.



აღწერისას გამოკითხავენ პოპულაციის ყველა წევრს და აგროვებენ ინფორმაციას. აღწერა დეტალურია, ზუსტი, მაგრამ საორგანიზაციოდ ძვირი და შრომატევადი. შესაძლებელია ადამიანების ან ობიექტების აღწერა



[ტელესკოლა](#)



როგორც ვხედავთ, **აღწერისას** ხდება სრული პოპულაციის გამოკითხვა, ხოლო შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვისას კი მცირე ჯგუფის გამოკითხვა.

შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვა გულისხმობს, მხოლოდ მოსახლეობის (ან გამოსაკითხი ჯგუფის) გარკვეული ნაწილის გამოკითხვას, რომელიც უნდა შეირჩეს შემთხვევის წესით.



ნიშნობი 1

გვინტერესებს, საქართველოში 12-18 წლამდე ახალგაზრდებს მათემატიკა უყვართ თუ არა და რატომ?

- პოპულაციიდან გამოვყავით **სამიზნე ჯგუფი** (ჯგუფი, რომელიც ჩვენი ინტერესის სფეროა) 12-18 წლის ახალგაზრდები.
- რადგან ყველას გამოკითხვა შრომატევადია, **შერჩევითი გამოკითხვის წესით** გამოვკითხავთ მცირე ჯგუფს და დასკვნას გავაკეთებთ ყველა მოსწავლის შესახებ.
- დასკვნის ობიექტურობისათვის, აუცილებელია გამოვკითხოთ **შემთხვევითი მოსწავლეები**.
- თუ მონაცემების შემგროვებელი მივიდა მათემატიკურ სკოლასთან და იქ შეარჩია მცირე ჯგუფი, მაშინ დასკვნა არ იქნება რეალობასთან ახლოს, რადგან სავარაუდოდ, მათემატიკური სკოლიდან გამოსულ ბავშვებს ეყვარებათ მათემატიკა, ამიტომ აუცილებელია, გამოიკითხოთ სხვადასხვა სკოლის ბავშვები.

❓ საკვანძო კითხვა: რას ეწოდება მიკერძოებული გამოკითხვა?

არსებობს სამუშაო ჯგუფის შედგენის რამდენიმე გზა, ერთ-ერთია მიკერძოებული გამოკითხვა. მაგალითად, თუ გვინტერესებს, გავიგოთ, მოსწავლეებს სპორტი ურჩევნიათ თუ ცეკვა და გამოვკითხავთ მხოლოდ სპორტული სკოლის ბავშვებს და შედეგს განვაზოგადებთ ყველა მოსწავლეზე, მაშინ მივიღებთ მიკერძოებულ გამოკითხვას. აღნიშნულ წესს ჰქვია BIAS Sample – მიკერძოებული შერჩევა.

მონაცემების მოგროვებისა და დამუშავებისათვის საჭიროა დავიცვათ შემდეგი წესები, მოქმედებათა თანმიმდევრობა:

ნაბიჯი 1:

ჩამოაყალიბეთ საკითხი, რომლის შესწავლაც იქნება შესაძლებელი და ჩამოწერეთ კითხვები, რომლებიც დაგეხმარებათ საკითხის შესწავლაში.

ნაბიჯი 2:

შეაგროვეთ მონაცემები

ნაბიჯი 3:

დაამუშავეთ მონაცემები

ნაბიჯი 4:

შეაჯამეთ და წარმოადგინეთ მონაცემები

ნაბიჯი 5:

მოახდინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია; გაანალიზეთ მონაცემები და დაწერეთ დასკვნა



ნიმუში 2

ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების კვლევისათვის, კვლევის რომელი მეთოდის გამოყენება იქნება სასურველი და მეტად ეფექტური?

ა) თბილისში საგზაო შემთხვევების (ავარიების) გამომწვევი მიზეზები.

ბ) ბიზნესს აინტერესებს, რა უფრო უყვარს მოსახლეობას – კოკა-კოლა თუ პეპსი?

ა) აღწერა – პირველი საკითხის საკვლევად აუცილებელია ზუსტი და დეტალური ინფორმაციის ფლობა. ამიტომ სასურველია თუ მკვლევარი დააფიქსირებს ყველა საგზაო შემთხვევის.

ბ) შერჩევითი გამოკითხვა – მსგავსი საკითხის საკვლევად საკმარისია გამოკითხვის მოსახლეობის გარკვეული ნაწილი. გამოკითხვისას უნდა გამოიყენებოდნენ „შემთხვევითი წევრები“. თუ გამოკითხველი გამოკითხავს მხოლოდ იმ ადამიანებს, რომლებმაც კოკა-კოლა იყიდეს, გამოკითხვა იქნება მიკერძოებული.



ნიმუში 3

მოსწავლემ გადაწყვიტა გაერკვია I-VII კლასის მოსწავლეებს რა უფრო უყვარდათ, კომპიუტერული თამაშები თუ გარე აქტივობები? (მაგ: ფეხბურთი, სირბილი და ა.შ).

მოცემული კითხვარის მიხედვით, შეძლებენ თუ არა მოსწავლეები გამოკითხვის სწორად წარმოებას?

მოცემული კითხვარის მიხედვით, შეძლებენ თუ არა მოსწავლეები სწორად გამოკითხვას?

გამოკითხვა იქნება მიკერძოებული და არ იქნება ზუსტი ყველა 1-7 კლასის მოსწავლეთა პოპულაციისთვის.

ჩამონათვალში მითითებულია მხოლოდ კომპიუტერული თამაშების სახელები და არ არის არც ერთი გარე ან ფიზიკური აქტივობა.

ადამიანები ხშირად, გამოიყენებენ მიკერძოებულად, რათა დაასაბუთონ თავიანთი აზრის უპირატესობა.

ფორტნაიტის თამაში

მაინკრაფტის თამაში

ფორტნაიტი და მაინკრაფტი კომპიუტერული თამაშებია.

გაფრთხილება: არ არის სასურველი კომპიუტერული თამაშების დიდი დროით თამაში



სავარჯიშოები

1. დაწერეთ კვლევის რომელი მეთოდი უნდა იყოს გამოყენებული ჩამოთვლილი საკითხების ანალიზისთვის?

- I. რომელია ყველაზე პოპულარული სატელევიზიო შოუ?
- II. ფეხბურთის ჩემპიონატის დროს, კვირაში სულ რამდენი გოლი გადის?
- III. 10 წლამდე ბავშვებს კატა უფრო უნდათ რომ ჰყავდეთ თუ ძაღლი?
- IV. წლის განმავლობაში გოგო მეტი დაიბადა თუ ბიჭი?

ინფორმაციისთვის:

- ქვეყნის დემოგრაფიულ ვითარებაში გასარკვევად ატარებენ კვლევებს, იმასთან დაკავშირებით, იკლო შობადობამ თუ მოიმატა.
- მაგალითად, ბიზნესში მარკეტინგის წარმომადგენლებს აინტერესებთ, რომელი სატელევიზიო შოუ უფრო პოპულარულია და უყურებს მოსახლეობა იმისათვის, რომ განათავსონ რეკლამა და ა.შ.

2. აპლიკაციების კომპანიამ შექმნა ორი ახალი კომპიუტერული თამაში. იმისათვის, რომ გაეგოთ რომელი თამაში უფრო მოსწონთ ბავშვებს, რამდენიმე სკოლაში გამოკითხეს 500-მდე ბავშვი. გამოკითხვის რა მეთოდი გამოიყენეს კვლევისთვის?

3. მოსწავლეს უნდა დაამტკიცოს, რომ ახალგაზრდებს როგორ მეტად ჰიპ-ჰოპი მოსწონთ.

- როგორი მეთოდით უნდა ჩაატაროს გამოკითხვა: ჰკითხოს ყველას – აღწეროს ახალგაზრდები ვინ რომელ მიმდინარეობას უსმენს? ჰკითხოს შემთხვევითად შერჩეულ მოსწავლეებს, თუ ჰკითხოს მარტო მათ, ვისაც უყვართ ჰიპ-ჰოპი?
- შეადგინეთ კითხვარის ფორმა.

4. იმისათვის, რომ დაედგინა, ცურვა უფრო მეტად უყვართ თანატოლებს თუ ცეკვა, ნუცამ გამოკითხა აუზზე მისული მისი თანატოლები.

- გამოკითხვის რა მეთოდით ჩაატარა კვლევა ნუცამ?

5. იმისათვის, რომ დადგინდეს, მოსახლეობის რაოდენობა შემცირდა თუ გაიზარდა, რა ტიპის კვლევა არის ჩასატარებელი?

6. ჩამოთვლილი საკითხების საკვლევად გადაწყვიტეთ, რომელი მეთოდით აჯობებს კვლევის ჩატარება: მთელი პოპულაციის გამოკითხვა (აღწერა) თუ შერჩევითი მეთოდის გამოყენება?

- ა) რამდენი საათის განმავლობაში მეცადინეობენ მოსწავლეები კვირაში მათემატიკას?
- ბ) მოსახლეობას თანამედროვე ფილმები უფრო მოსწონს თუ ძველი ფილმები?
- გ) 14 წლამდე მოსწავლეებს ბეტმენი უფრო მოსწონთ თუ სუპერმენი?

პასუხი დაასაბუთეთ. (ბეტმენი და სუპერმენი ფილმის პერსონაჟებია).



საპარჯიშოები



■ ჯგუფური სამუშაო

7. ლიზიმ, ელიმ და ანდრიამ გადაწყვიტეს მეშვიდე, მერვე და მეცხრე კლასელების გამოკითხვა თემაზე ზაფხულის კურორტები უყვართ თუ ზამთრის? სულ სამ კლასში მოსწავლეების რაოდენობა არის შემდეგი:

მეგობრებმა გადაწყვიტეს კვლევა ჩაატარონ შერჩევითი წესით და გამოკითხონ სულ 60 მოსწავლე.	მე-7 კლასი	მე-8 კლასი	მე-9 კლასი
	120	90	150

ა) რამდენი მოსწავლე უნდა გამოკითხონ თითო კლასიდან?

ბ) შეადგინეთ გამოკითხვის ფორმა, რომელშიც იქნება რამდენიმე მიზეზი თუ რა უპირატესობები აქვს თითოეულ კურორტს.

გ) რომელია სამიზნე აუდიტორია?

8. ეკამ და სერგიმ გადაწყვიტეს სპორტსმენების გამოკითხვა, თუ რომელი პერსონაჟი უფრო მეტად მოსწონთ, ჰარი პოტერი თუ აირონ მენი. იმისათვის, რომ დაადგინონ, რის გამო რომელი ფილმის პერსონაჟს ანიჭებენ უპირატესობას, შეადგინეს კითხვარი. (ჰარი პოტერი წიგნია, რომლის მიხედვითაც გადაიდეს ფილმი)

- აღწერეთ, როგორ უნდა ჩაატარონ გამოკითხვა?
- რა ტიპის, კითხვები უნდა დაწერონ?
- რა შემთხვევაში იქნება გამოკითხვა მიკერძოებული?

ტერმინები

პოპულაცია

სამიზნე
აუდიტორია

აღწერა

მიკერძოებული გამოკითხვა

შერჩევითი გამოკითხვა

კვლევა

გამოკითხვა

შემთხვევითი წესით მონაწილის
არჩევა

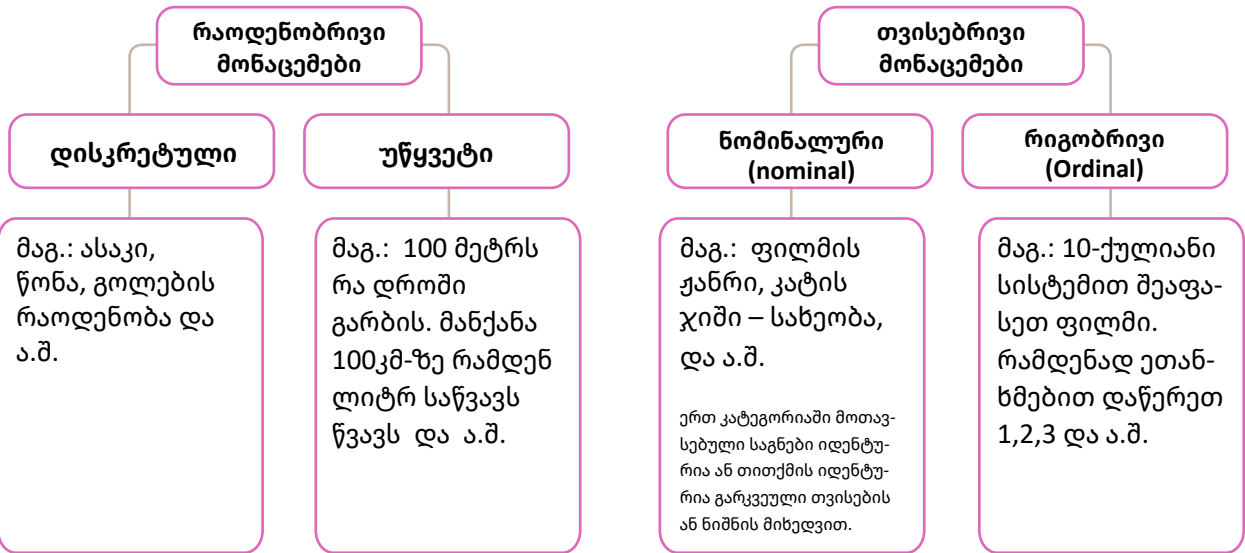
კითხვარი

1.2.მონაცემების კლასიფიკაცია

მონაცემების დაშლაცა

სტატისტიკაში შეგროვებულ ინფორმაციას ეწოდება მონაცემები. თავის დასაწყისში წარმოდგენილ კითხვარს თუ დავაკვირდებით, მივხვდებით, რომ მონაცემები არის სხვადასხვა სახის: რაოდენობრივი და თვისებრივი.

თავის მხრივ, ხდება რაოდენობრივი და თვისებრივი მონაცემების კლასიფიკაცია



რაოდენობრივი მონაცემები	მიიღება თვლის ან დაკვირვების შედეგად და გამოისახება რიცხვებში. რაოდენობრივი, რიცხვებით გამოსახული ინფორმაციის წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა სახით.
თვისებრივი მონაცემები	გამოხატავს ობიექტის მდგომარეობას ან თვისებას.

განვიხილოთ მაგალითი და დავალაგოთ მონაცემები:

ნინიმ გადაწყვიტაჩაეტარებინა გამოკითხვა კლასელებში, თუ რამდენი და-ძმა არის თითოეულ ოჯახში (რამდენი დედამიწვილია თითოეულ ოჯახში), გამოკითხვა 14 კლასელი და ჩაიწერა მონაცემები შემდეგნაირად:	1 2 2 3 3 2 1 1 3 2 2 1 1 2
---	-----------------------------



მოვაწესრიგოთ მონაცემები ცხრილის მეშვეობით. სტატისტიკაში მონაცემების ორგანიზებისათვის და დასათვლელად გამოიყენება პატარა ჯოხები (გამოისახება სიმბოლოთი |).

შედეგები	რაოდენობის დათვლა	რაოდენობა რიცხობრივად	ფარდობითი სიხშირე
1	++++	5	$\frac{5}{14}$
2	++++	6	$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$
3		3	$\frac{3}{14}$
სულ		14	1

ფარდობითი სიხშირე – მონაცემის სიხშირის შეფარდებას მონაცემის საერთო რაოდენობასთან, ფარდობითი სიხშირე ეწოდება.

ფარდობითი სიხშირეების ჯამი უდრის ერთს.

ერთი ჯოხი აღნიშნავს ერთს. +++ – აღნიშნავს 5-ს.

გამომდინარე იქიდან, რომ ცხრილი გვიჩვენებს, რამდენად ხშირია თითოეული ვარიანტი (კატეგორია), ცხრილს ეწოდება სიხშირის გამომსახველი ცხრილი.

ცხრილიდან ჩანს, რომ 14 გამოკითხულიდან, 5 ოჯახშია მხოლოდ ერთი ბავშვი,

6 ოჯახში – 2 ბავშვი და 3 ოჯახში – 3 ბავშვი.

გამოკითხვის პროცესში „ჯოხების“ გამოყენება გვეხმარება მონაცემების შეგროვებასა და ორგანიზებაში. გამოკითხვისას, როდესაც რესპოდენტი გვპასუხობს, რომ ოჯახში არის 3 ბავშვი, ჩვენ 3-ის გასწვრივ ჩამოვუსვამთ ერთ ჯოხს და ა.შ. სიხშირე და ფარდობითი სიხშირის სვეტი მარტივად აღქმადს ხდის ინფორმაციას, გვიჩვენებს რომელი მონაცემი უფრო ხშირად მეორდება.

შენიშვნა: რესპოდენტი არის ადამიანი, ვისი გამოკითხვაც ხდება.

მონაცემების წარმოდგენის ხერხები

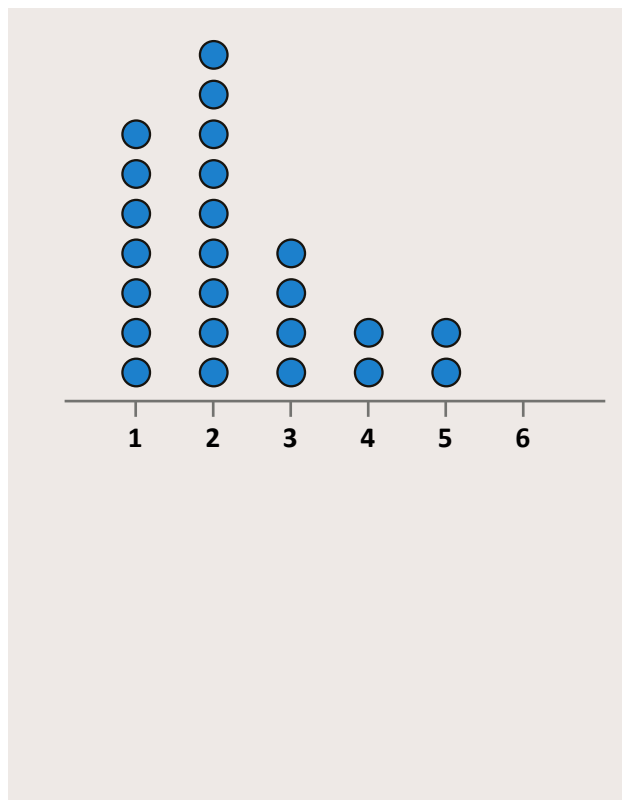
მონაცემების წარმოდგენა წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით

სიხშირეთა ცხრილის გრაფიკული წარმოდგენა ხდება წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით.

რიცხვით ღერძზე ინიშნება მონაცემები, ხოლო ვერტიკალურად ვსვამთ იმდენ წერტილს, რამდენჯერაც გამოვრდა აღნიშნული მონაცემი. დიაგრამაზე განლაგებული ინფორმაცია იკითხება შემდეგნაირად:

თითოეული მონაცემი გამოვრდა:

- 1 — 7-ჯერ
- 2 — 9-ჯერ
- 3 — 4-ჯერ
- 4 — 2-ჯერ
- 5 — 2-ჯერ



ნიმუში 1 – პროგნოზირება – პროპორციის გამოყენება სტატისტიკაში

კომპანიაში 1600 ადამიანია დასაქმებული, შემთხვევითი წესით შერჩეულ 50 აპლიკანტს შორის 18 თქვა, რომ ჰყავს ავტომობილი. ივარაუდეთ, რამდენ ადამიანს შეიძლება ჰყავდეს ავტომობილი 1600 ადამიანიდან?

იმისათვის, რომ მიახლოებით ვივარაუდოთ, რამდენ ადამიანს შეიძლება ჰყავდეს მანქანა 1600 თანამშრომლიდან, დავწეროთ პროპორცია:

თუ 50-დან ჰყავდა 18-ს

სავარაუდოდ 1600-დან ეყოლება X-ს

ვადგენთ პროპორციას შემდეგი წესით:

$$\frac{\text{გამოკითხულთაგან ავტომობილის მფლობელთა რაოდენობა}}{\text{გამოკითხულთა რაოდენობა}} = \frac{\text{ავტომობილის მფლობელთა სრული რაოდენობა}}{\text{თანამშრომელთა სრული რაოდენობა}}$$

$$\frac{18}{50} = \frac{x}{1600}$$

პროპორციაში ჯვარედინი წევრების ნამრავლი ტოლია

$$50 \cdot x = 1600 \cdot 18$$

$$x = 576$$

რა საკვირველია, ამ შემთხვევაში, რადგან არ გამოვიკითხა სრულად, პასუხი არ არის ზუსტი. პროპორციის გამოყენებით, მიახლოებით, 1600 თანამშრომლიდან მანქანა ეყოლება 576-ს.



სავარჯიშოები

■ მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. რადიო სადგურმა ჩაატარა გამოკითხვა შემთხვევითი გამოკითხვის წესით, თემაზე, რა ჟანრის მუსიკა უფრო მოსწონს მსმენელს. შედეგები მოცემულია ცხრილით.

ა) სულ რამდენი მსმენელი გამოიკითხა?

ბ) რა არის თითოეული ჟანრის სიხშირე?

ჟანრი	რაოდენობის დათვლა	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
როკი	+++		
პოპი			
რეპი	+++		
ჰოპ-ჰოპი	+++ +++		
ელექტრონული			

გ) რა არის თითოეულის ფარდობითი სიხშირე?



მითითება: შეავსეთ ცხრილი, იმუშავეთ რვეულში.

2. კომპანიაში 1200 თანამშრომელი მუშაობს. იმისათვის, რომ მოაწესრიგონ პარკინგის პრობლემა, ანუკიმ და ზუკამ გადაწყვიტეს დაადგინონ რამდენს ჰყავს მანქანა. რადგან ყველა თანამშრომლის გამოკითხვა დიდ დროს მოითხოვს, მათ გამოიყენეს შერჩევითი გამოკითხვის წესით ჩაატარეს. შემთხვევითი შერჩეული 60 გამოკითხული აპლიკანტიდან 24-მა თქვა, რომ ჰყავდა მანქანა. რა დასკვნის გაკეთება შეუძლია ანუკის და სანდროს თანამშრომლების სრული რაოდენობისთვის? სავარაუდოდ, რამდენ თანამშრომელს ეყოლება მანქანა?

3. გამოკითხვა შერჩევითი წესით:

ქალაქში, სადაც მოსახლეობის რიცხვი არის 200000, გადაწყვიტეს ჩატარებინათ კვლევა, რომელი ბრენდის ნოუტბუქს ანიჭებენ უპირატესობას: ბრენდი A, ბრენდი B, ბრენდი C.

შემთხვევითი შერჩევის გამოკითხვის წესით გამოკითხეს 1000 მომხმარებელი. ცხრილში მოცემული შედეგების მიხედვით იპოვეთ:

ა) ფარდობითი სიხშირე და გამოსახეთ პროცენტებში.

ბრენდი	მომხმარებელი	ფარდობითი სიხშირე
ბრენდი A	350	
ბრენდი B	250	
ბრენდი C		



სავარჯიშოები

- ბ) რისთვის შეიძლება გამოიყენოს ბიზნესმა აღნიშნული ინფორმაცია?
 გ) დაწერეთ 2 მიზეზი მაინც, რატომ შეიძლებოდა ჩაეტარებინა გამოკითხვა კომპანია ბრენდ A-ს?

4. მოცემულია ინფორმაცია წერტილოვანი ლიაგრამის მეშვეობით.

ლანამ გადაწყვიტა ყოველდღე ევარჯიშა და ერბინა ლისის ტბაზე.

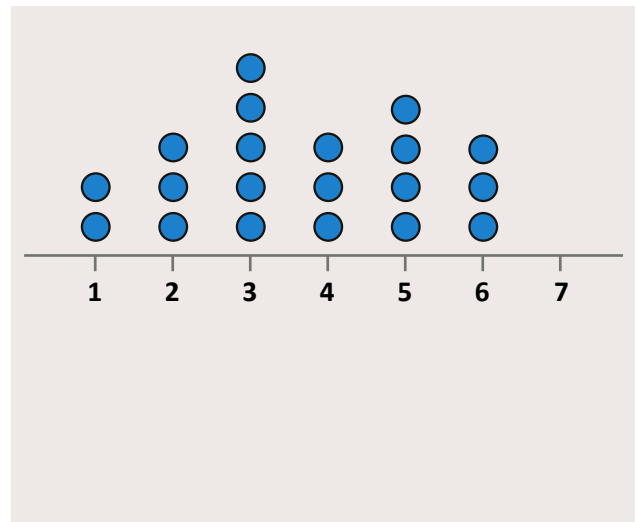
ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია რამდენ კმ-ს დარბოდა 20 დღის განმავლობაში თითოეულ დღეს.

ა) რამდენი დღის განმავლობაში ირბინა ლანამ 3კმ?

ბ) რამდენი დღის განმავლობაში ირბინა ლანამ 4 და 5 კმ?

გ) სულ რამდენი კილომეტრი ირბინა ლანამ 20 დღის განმავლობაში?

დ) გამოითვალეთ თითოეული მონაცემის ფარდობითი სიხშირე.



5. ორმა მოსწავლემ გადაწყვიტა შეესწავლა თუ რამდენად უყვართ კითხვა მაღალი კლასის მოსწავლეებს და ჩაატარეს გამოკითხვა:

კვლევა: მე-10 – მე-12 კლასელების წიგნის კითხვის სიყვარულის შესახებ	
კვლევის მეთოდი	კვლევის შედეგი
ელენემ გამოიკითხა 40 ნაცნობი მაღალკლასელი	75%-მა უთხრა, რომ მუდმივად კითხულობენ ნოველებს.
ტატამ გამოიკითხა სკოლის მასშტაბით 100 უფროსკლასელი შემთხვევითი შერჩევის წესით	40%-მა უთხრა, რომ მუდმივად კითხულობენ ნოველებს.

იმსჯელეთ და დაასაბუთეთ პასუხები:

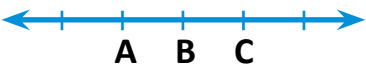
- ა) რომელმა რა მეთოდით ჩაატარა გამოკითხვა?
 ბ) რომელი მოსწავლის გამოკითხვა მოგცემს მეტად ობიექტურ სურათს?

6. რა განსხვავებაა პოპულაციის აღწერასა და შერჩევითი წესით მცირე ჯგუფის გამოკითხვას შორის?

7. რა განსხვავებაა შემთხვევითი წესით შერჩეული ადამიანების გამოკითხვასა და მიკერძოებულ გამოკითხვას შორის?



სავარჯიშოები

8. გიორგიმ გააგორა კამათელი და ჩამოწერა შედეგები, რაც მოვიდა კამათლის გაგორების შემდეგ. შედეგები გამოიყურება შემდეგნაირად:
- 3, 1, 2, 1, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 5
4, 2, 6, 2, 4, 5, 5, 3, 1, 3, 1, 2, 5, 6
- ა) წარმოადგინეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილის ან მონაკვეთის დახმარებით.
ბ) დაითვალეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის სიხშირე.
გ) დაითვალეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე.
9. მოცემული მონაცემები გადაიტანეთ სიხშირის მონაკვეთზე და დაითვალეთ თითოეული მონაცემის მოსვლის სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე.
- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | B | C | C | B | A | A | B | C |
| C | A | B | B | A | B | C | C | A | B |
- 
10. როკონცერტის დასრულების შემდეგ, მარიამმა გამოკითხა კონცერტიდან გასული მსმენელი იმის დასადგენად, თუ რა ჟანრის მუსიკა მოსწონდათ მეტად.
- ა) სწორად დაგეგმა მარიამმა კვლევა?
ბ) რა ტიპის მონაცემებს შეაგროვებს მარიამი, მიკერძოებულს თუ ობიექტურს?



კვლევა სპორტში

11. მაიას და სანდროს სურდათ კვლევის შედეგად დაედგინათ, რამდენი მოსწავლეა დაკავებული სპორტით. სკოლაში 630 მოსწავლე სწავლობს, სრული რაოდენობის გამოკითხვის ნაცვლად, მათ შემთხვევითი გამოკითხვის წესით გამოკითხეს 70 მოსწავლე და აღმოჩნდა, რომ 70-დან 14 მოსწავლე იყო სპორტით დაკავებული.



რა ვარაუდის გაკეთება შეუძლიათ მაიას და სანდროს თავიანთი კვლევისთვის? კიდევ, რა შეუძლიათ დაადგინონ აღნიშნულ საკითხთან დაკავშირებით?

 **მინიშნება:** რამდენი სხვადასხვა სახეობის სპორტით არიან დაკავებულები. რა კითხვების დამატება შეუძლიათ კითხვარში კვლევის გამრავალფეროვნებისთვის? შეადგინეთ კითხვარის ნიმუში.

სავარჯიშოები

12. ბიზნესი: საბას საწარმო წელიწადში აწარმოებს 180 000 მაისურს. მას სურდა, დაედგინა, მიახლოებით, რამდენი დეფექტიანი მაისურს აწარმოებს წლიურად. ამისათვის, მან შემთხვევითი შერჩევის წესით ამოარჩია 135 მაისური და აღმოჩნდა, რომ 15 იყო დეფექტით. რა ვარაუდის გაკეთება შეუძლია საბას? სავარაუდოდ, რამდენი დეფექტიანი მაისური იქნება 180 000 მაისურში?

კვლევის დაგეგმვა

13. იმუშავეთ ჯგუფებში. შეადგინეთ კითხვარი იმის დასადგენად თუ:

- ა) რა ჟანრის ფილმები მოსწონთ კლასში? სკოლაში?
- ბ) რამდენად მოსწონთ 1-6 კლასელებს კომპიუტერული თამაშები და რა დროს უთმობენ კვირაში თამაშს?

14. ოთომ და ნიკამ გადაწყვიტეს დაედგინათ თანატოლებს რა უფრო უყვართ თეატრი თუ კინო? მათ გადაწყვიტეს 10 ქულიანი სისტემით შეფასებინათ გამოკითხულთა მოწონების ხარისხი.

- თუ მოსწავლეს ძალიან უყვარს რომელიმე, უნდა დაუწეროს 9 ან 10.
- თუ საშუალოდ უნდა მიაღიჭოს 5-8 ქულა.
- თუ არც ისე მოსწონს, მაშინ 1-4 ქულა

	კინო	თეატრი
1-4		
5-8		
9-10		

დასკვნა: როგორი ტიპის მონაცემებს აგროვებენ ოთო და ნატა?

პ.ს. გამოკითხეთ კლასელები და დაწერეთ დასკვნა.

15. წლის ბოლოს სკოლაში ჩატარდა გამოცდა მათემატიკაში, რომელშიც მოსწავლეებმა მიიღეს შეფასებები A, B ან P.

A ნიშნავს, რომ მოსწავლეს ძალიან კარგად აქვს დაძლეული პროგრამა.

B ნიშნავს, რომ მოსწავლეს კარგად აქვს დაძლეული პროგრამა, იცის მთავარი საკითხები და კონცეფციები.

P ნიშნავს, რომ მოსწავლეს კიდევ სჭირდება დამატებითი მეცადინეობა და ცოდნის განმტკიცება.

გადაიტანეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილში და დაადგინეთ, მოსწავლეთა რამდენმა პროცენტმა მიიღო A, B ან P.

შედეგები გამოიყურება შემდეგნაირად:

A,	B,	B,	P,	A,	A,	A,	B,	A,	P,	P,	A,	A,	A,	B,	B,	A,	A,	A,	B,
B,	B,	B,	A,	A,	P,	P,	A,	A,	P,	B,	B,	B,	A,	B,	B,	A,	B,	A,	B,
A,	B,	B,	B,	B,	B,	B,	B,	A,	P,	P,	A,	A,	A,	A,	B,	A,	A,	B,	A,
P,	B,	B,	P,	P,	P,	A,	B,	B,	B,	P,	P,	P,	A,	B,	B,	B,	A,	A,	B,

1.3. მონაცემების წარმოდგენა

ჩვენ უკვე ვნახეთ როგორ ხდება მონაცემების წარმოდგენა წერტილოვანი დიაგრამით, გავეცნოთ მონაცემების წარმოდგენის სხვადასხვა ხერხს:

ალგებრის ნაწილში და წინა კლასებში ისწავლეთ

- სვეტოვანი დიაგრამა
- წრიული დიაგრამა
- პიქტოგრამა

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მონაცემები არსებობს რაოდენობრივი და თვისებრივი.

ხშირ შემთხვევებში, თვისებრივი მონაცემების წარმოსადგენად გამოიყენებენ სვეტოვან დიაგრამებს.

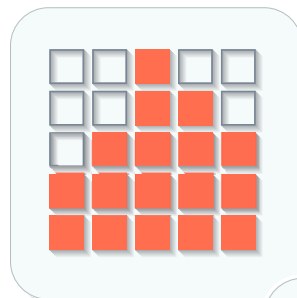
კვლევის ორგანიზებისას დგება კითხვარი, რომლის მეშვეობითაც გროვდება ინფორმაცია, ხოლო შემდეგ წარმოდგენილია ამ ინფორმაციის წარმოდგენა სხვადასხვა თვალსაჩინო ფორმით. სატელევიზიო საშუალებები, გაზეთები. ინტერნეტი ინფორმაციის წარმოსადგენად ხშირად იყენებენ გრაფიკებს, ცხრილებს, დიაგრამებს.

გავეცნოთ სხვადასხვა დიაგრამას, რომელსაც ხშირად ვხვდებით ყოველდღიურ ცხოვრებაში;

ფუნქციების შესწავლის დროს ჩვენ უკვე გავაცანით სხვადასხვა დიაგრამას და განვიხილეთ მათი აგების წესები; მოგვიანებით, ჩვენ დავაკავშირებთ ფუნქციებს სტატისტიკასთან. ამ ეტაპზე, გავიხსენოთ, როგორ ხდება ინფორმაციის წარმოდგენა;



- როგორ და რა წესით გადააქვთ ანალიტიკოსებს ინფორმაცია ?
- როდის რა ტიპის დიაგრამების შერჩევა ხდება?



დიაგრამები; წარმოდგენილი ინფორმაცია სხვადასხვა დიაგრამის გამოყენებით

სვეტოვანი დიაგრამა

ვიდეო ინსტრუქცია

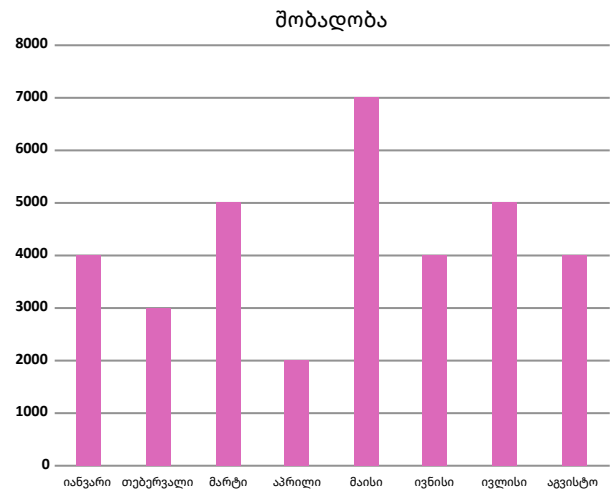
ცხრილით მოცემული ინფორმაცია გვაჩვენებს, თუ დაახლოებით რამდენი ახალშობილი დაიბადა თვეების მიხედვით (დავუშვათ 2020 წელს);

თვე	შობადობა
იანვარი	4000
თებერვალი	3000
მარტი	5000
აპრილი	2000
მაისი	7000
ივნისი	3000
ივლისი	5000
აგვისტო	4000

იმისათვის, რომ ინფორმაცია მეტად თვალსაჩინოდ იყოს მოწოდებული, ინფორმაცია წარმოდგენილია დიაგრამის მეშვეობით. კონკრეტულად, სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით

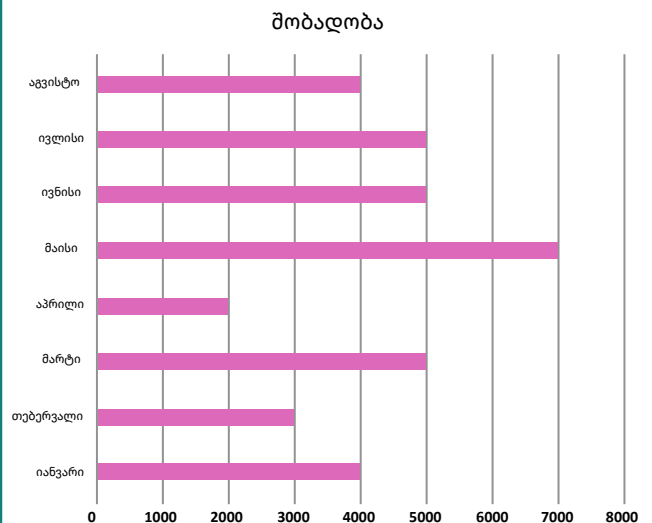
პარიანტი 2

– ჰორიზონტალური სვეტოვანი დიაგრამა შესაძლებელია სვეტები აღმართული იყოს როგორც ვერტიკალურად, ასევე ჰორიზონტალურად;



ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (თვე, შობადობა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ გრაფიკი. გრაფიკის ფორმას ეწოდება დიაგრამა (სვეტოვანი დიაგრამა)

ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავიტანოთ თვეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადავიტანოთ ახალშობილთა რაოდენობები. ჰორიზონტალურ ღერძზე აღმართული მართკუთხედების (სვეტების) სიმაღლეები გვაჩვენებს ახალშობილთა რაოდენობებს. (ერთეულოვან მონაკვეთად აღებულია 1000);



(ასეთ შემთხვევაში ვერტიკალურ ღერძზე გადავზომავთ თვეებს. ხოლო ჰორიზონტალურზე ახალშობილთა რაოდენობებს).

აღნიშნული სიტუაცია შეიძლება აღვწეროთ ასევე **დისკრეტული გრაფიკით**.

წრიული დიაგრამა

როგორც ხედავთ, ერთი და იგივე ინფორმაცია წარმოვადგინეთ 3 სხვადასხვა ფორმით;

გამომდინარე იქიდან, თუ როგორი ფორმით გვინდა ინფორმაციის

წარდგენა, ვირჩევთ ვიზუალიზაციას;

მაგალითად, აღნიშნულ მაგალითში წრიულ დიაგრამაზე ინფორმაცია მოცემულია პროცენტებით;

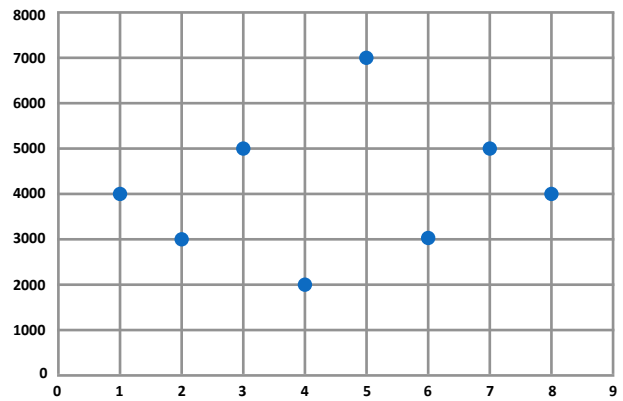
ხაზოვანი დიაგრამა

ჩვენ ვიცით, რომ რაოდენობრივი მონაცემები შეიძლება იყოს დისკრეტული ან უწყვეტი, გაზომვის შედეგად მიღებული (მანძილი, დრო, სიჩქარე და ა.შ.), რომელთა წარმოდგენა მოსახერხებელია ხაზოვანი დიაგრამით.

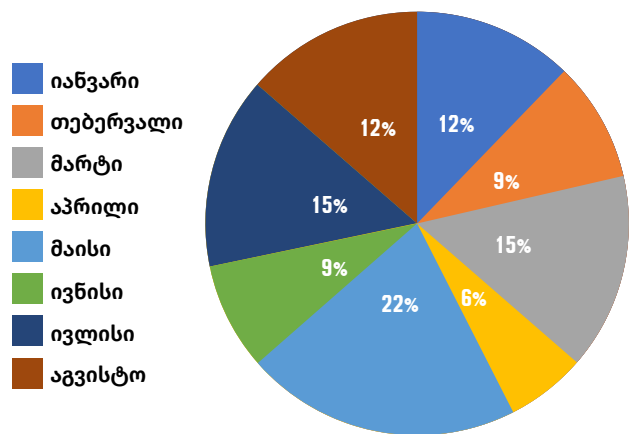
მობილურის აპლიკაციით ჩვენ შეგვიძლია ამინდის ყოველდღიური ან ყოველკვირეული პროგნოზის შემოწმება, ასევე შეგვიძლია საათობრივი პროგნოზის ნახვა.

განვიხილოთ დღის პროგნოზი;

დისკრეტული გრაფიკი

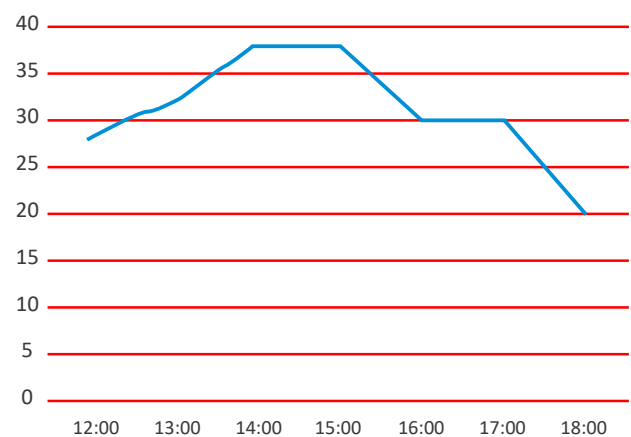


შობადობა



წრიული დიაგრამის აკება
პროგრამა უქსელით

დღის პროგნოზი



თუ ჩავთვლით, რომ ტემპერატურა თანაბრად იზრდებოდა, შეგვიძლია შევაერთოთ წერტილები სიბრტყეზე და ვივარაუდოთ, 12:00-დან 13:00 სთ-მდე შუალედში რა იქნებოდა ტემპერატურა ყოველი წუთისთვის.

სთ	ტემპ
12:00	28
13:00	32
14:00	38
15:00	38
16:00	30
17:00	30
18:00	20

გვაქვს ორი სხვადასხვა ტიპის ინფორმაცია, საათები და თითოეული საათისთვის შესაბამისი ტემპერატურა:

(სთ; ტემპერატურა)

პიქტოგრამა:

პიქტოგრამა (*pictus* – ლათინურად დახატულს ნიშნავს), ნახატი ან ნახატების მიმდევრობის საშუალებით აზრის გადმოცემის უძველესი ხერხია.

პიქტოგრამებს ჯერ კიდევ ქვის ხანაში იყენებდნენ უძველესი ადამიანები. პირველი პიქტოგრამა 30 000 წლის წინ გაჩნდა.

9000 წლის უკვე მსოფლიოში გავრცელდა, თუმცა აქტიური გამოყენება გავრცელებიდან 4000 წლის შემდეგ დაიწყო.

თანამედროვეობაში, კომპიუტერის მომხმარებლები მას icon-საც ეძახიან.

პიქტოგრამებს თანამედროვეობაში ბევრი სხვადასხვა მიზნითა და დანიშნულებით გამოიყენებენ. მაგალითად, **იდეის მკაფიოდ და მოკლედ გადაცემისთვის, შეხსენებისთვის და ა.შ.**

მოიძიეთ ინფორმაცია პიქტოგრამებზე და გაუზიარეთ თანატოლებს.

პიქტოგრამას ადრეული ასაკიდან სწავლობენ სკოლის პერიოდში; პიქტოგრამა არის მონაცემების ვიზუალიზაციის და დალაგების ისეთი ფორმა, როცა მონაცემი გამოსახულია ნახატით.

გრაფიკის მიხედვით, ჩვენ ვხედავთ, რომ დღის განმავლობაში ტემპერატურა იზრდებოდა, 14:00 დან 15:00-მდე ტემპერატურა იყო მუდმივი, 15:00-დან დაიწყო კლება, 16:00-დან 17:00 სთ-მდე ისევ იყო მუდმივი, 17:00-დან კი დაიწყო კლება. შუადღისას დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა, დაახლოებით 38 გრადუსი.



უძველესი იეროგლიფები



ცეკვა	
სიმღერა	
ხატვა	

როდესაც მონაცემებს წარმოვადგენთ პიქტოგრამებით, ერთი პიქტოგრამა შეიძლება აღნიშნავდეს ერთს, ხუთს, ათს და სხვა. გამომდინარე იქიდან, თუ აღმწერი სიმარტივისათვის რამდენი მნიშვნელობის მინიჭებას მოინდომებს.

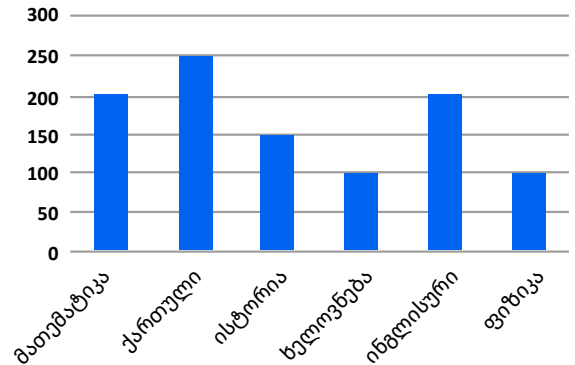


სავარჯიშოები

1. სტუდენტებმა გადაწყვიტეს გამოეკვლიათ, რომელი საგანი უფრო მეტად უყვართ სკოლის მოსწავლეებს მე-7 დან მე-12 კლასის ჩათვლით. ცხრილში მოცემულია გამოკითხვის შედეგები. (ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია საგნების ჩამონათვალი, ვერტიკალურზე იმ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებსაც ყველაზე მეტად უყვართ აღნიშნული საგანი).

დაამუშავეთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია:

- ა) სულ რამდენი მოსწავლე გამოიკითხა?
 ბ) რა არის თითოეული საგნის არჩევის ფარდობითი სიხშირე?
 გ) გამოსახეთ პროცენტებში, გამოკითხულთა რაოდენობის რა პროცენტს მოსწონს მათემატიკა ყველაზე მეტად?

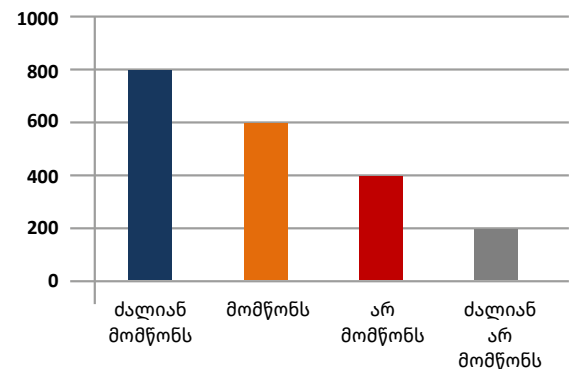


2. ქალაქში ჩატარდა გამოკითხვა თემაზე: მოსწონდათ თუ არა რეკონსტრუქციის შედეგად შეცვლილი ქუჩის ახალი იერსახე?

გამოკითხვაში მონაწილეებს უნდა ეპასუხათ:

- ძალიან მომწონს
- მომწონს
- არ მომწონს
- ძალიან არ მომწონს

- ა) რა ტიპს (მონაცემების კატეგორიას) მიეკუთვნება შეგროვებული მონაცემები?
 ბ) რა არის დადებითი პასუხების საერთო პროცენტული მაჩვენებელი?
 გ) რამდენი პროცენტით მეტია იმ ადამიანების რიცხვი, რომელთაც „ძალიან მოსწონს“ იმასთან შედარებით, ვისაც „ძალიან არ მოსწონს“?



3. ცხრილში მოცემული სიხშირეების მიხედვით, ააგეთ სვეტოვანი დიაგრამები (ასევე, წერტილოვანი დიაგრამები):

- იპოვეთ ფარდობითი სიხშირე;
- გამოსახეთ სიხშირე როგორც წილადის, ასევე პროცენტის მეშვეობით.

ა) ყველაზე ხშირად განმეორებადი მანქანის ფერი

ფერი	თეთრი	წითელი	ლურჯი	შავი	სხვა
სიხშირე	47	44	31	23	18
ფარდობითი სიხშირე					

სავარჯიშოები

ბ) აუდიტორიებში სტუდენტთა რაოდენობა

სტუდენტთა რაოდენობა	21	22	23	24	25	26	27
სიხშირე	1	4	7	9	15	8	2
ფარდობითი სიხშირე							

გ) სხვადასხვა პიცის გასაკეთებლად საჭირო დრო (დამრგვალებული, წუთებში)

დრო	5	6	7	8	9	10	11
სიხშირე	1	2	3	7	10	8	5
ფარდობითი სიხშირე							

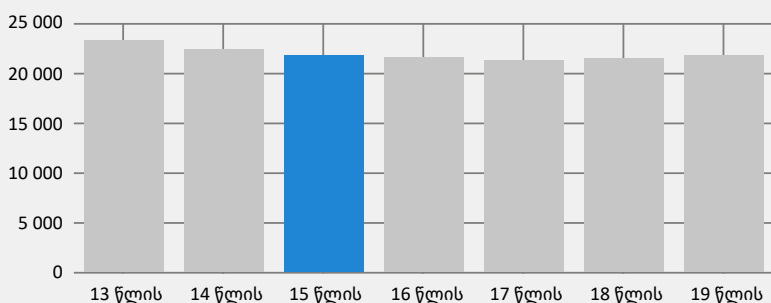
4. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 13-წლიდან 19 წლამდე, რამდენი ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში; დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

ა) 13-დან 19 წლამდე ბიჭების დაახლოებით რამდენ პროცენტს წარმოადგენს 14 წლის ბიჭები? 18 წლის ბიჭები?

ბ) წარმოადგინეთ აღნიშნული ინფორმაცია წრიული დიაგრამის მეშვეობით.

ინფორმაცია
აღებულია
ვებ-გვერდიდან

www.juniors.geostat.ge



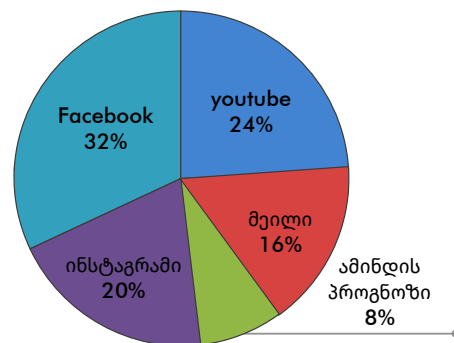
5. წრიული დიაგრამა:

წრიულ დიაგრამაზე მოცემულია მონაცემები მომხმარებლების მიერ მობილურის აპლიკაციების თუ ფუნქციების გამოყენების შესახებ.

ა) რომელი აპლიკაცია არის ყველაზე პოპულარული?

ბ) რა ტიპის მონაცემების შეგროვება და ანალიზი მოხდა?

გ) ჩაატარეთ გამოკითხვა კლასში: ჩამოთვლილთაგან, რომელი აპლიკაციით სარგებლობთ ყველაზე ხშირად და შეადარეთ მონაცემებს.



მინიმუმ: Facebook – ფეისბუქი, სოციალური ქსელი, Youtube – პლატფორმა, სადაც განთავსებულია ვიდეო მასალა.



სავარჯიშოები

6. **ანალიტიკა:** მოცემულია სვეტოვანი დიაგრამები, რომელთა მეშვეობით შედარებულია ორი კომპანიის მონაცემების შედარება.

იმუშავეთ ჯგუფებში: ცხრილით მოცემულია კომპანია A-ს (ყვითელი ფერით) და კომპანია B-ს (მავი ფერით) გაყიდვების სტატისტიკა ერთ-ერთ ქალაქში თვეების მიხედვით.

ა) რომელ თვეს გაიყიდა ყველაზე მეტი კომპანია A-ს პროდუქცია?

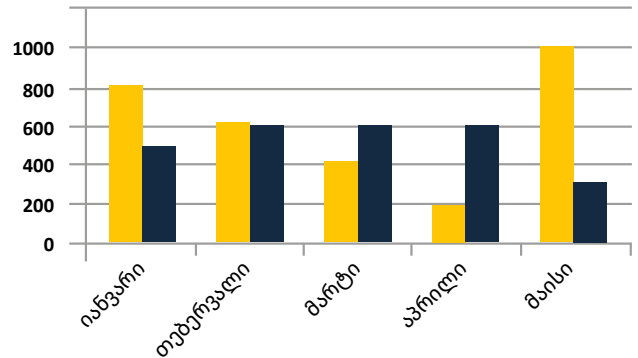
ბ) სულ რამდენი კომპანია A-ს და B-ს პროდუქცია გაიყიდა მარტის თვეში?

გ) რამდენი პროცენტით მეტი გაიყიდა მარტის თვეში კომპანია A-ს პროდუქცია კომპანია B-სთან შედარებით?

დ) მაისის თვეში აპრილის თვესთან შედარებით, რამდენით მეტი კომპანია A-ს პროდუქცია გაიყიდა?

ე) იანვრის თვეში მაისის თვესთან შედარებით რამდენ პროცენტითი კლება იყო ჯამურად გაყიდვებში?

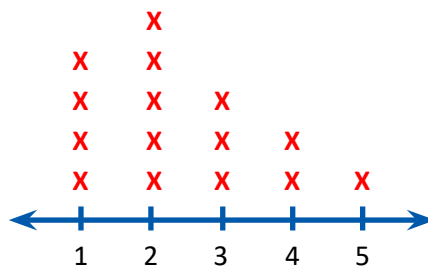
ვ) მოცემული ცხრილის მიხედვით, მოიფიქრეთ სამი კითხვა და უპასუხეთ.



ჯგუფური სამუშაო

7. ვენერამ გადაწყვიტა ვარჯიში, ის ყოველდღე ცურავდა აუზზე მინიმუმ 1 კმ-ს და მაქსიმუმ 5კმ-ს. წერტილოვან დიაგრამაზე მოცემულია ვენერამ რამდენჯერ რამდენი კმ გაცურა. გადაიტანეთ მოცემული ინფორმაცია ცხრილში.

კმ	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
1		
2		
3		
4		
5		



8. გიორგიმ გადაწყვიტა გამოეკითხა სკოლის მოსწავლეები, თუ რა აქტივობით არიან დაკავებული. გამოკითხვის შედეგად მის მიერ მოგროვებული ინფორმაცია გამოიყურება შემდეგნაირად:

მოცემული ცხრილით დაადგინეთ, სულ რამდენი მოსწავლე იყო დაკავებული ხატვით, სიმღერით და ცეკვით, თუ ერთი პიქტოგრამა ნიშნავს 20-ს.

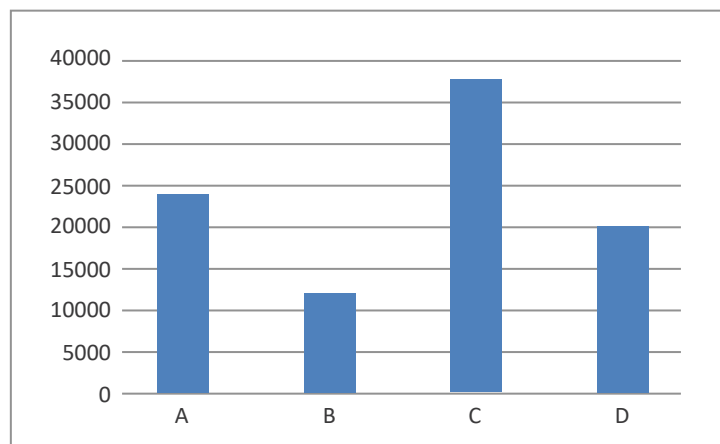
ცეკვა	
სიმღერა	
ხატვა	

სავარჯიშოები

9. დიაგრამით წარმოდგენილია იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც ფლობენ ინგლისურ (A), გერმანულ (B), რუსულ (C) და ფრანგულ (D) ენებს.

ამ მონაცემების მიხედვით დაადგინეთ:

- 1) სტუდენტების რა ნაწილმა იცის ფრანგული ენა?
- 2) სტუდენტების რამდენმა პროცენტმა იცის გერმანული ენა?



გამეორება

10. კომპანიამ, რომელსაც კლიენტების ბაზაში 2700 მომხმარებელი ჰყავს, შემთხვევითი შერჩევის წესით გაუგზავნა მეილი 150 მომხმარებელს კითხვით: მოსწონთ თუ არა მათი მომსახურება?
- ა) გამოკითხვის რა წესი გამოიყენა კომპანიამ?
 - ბ) როგორ ფიქრობთ, იქნება თუ არა მისი გამოკითხვა მიკერძოებული?
- პასუხი დაასაბუთეთ.
11. სათამაშოების მწარმოებელმა მაღაზიამ მაღაზიაში შესული 250 ბავშვიდან 40 გოგონას ჰკითხა მოსწონდათ თუ არა მათი სათამაშოები. რამდენად ობიექტური დასკვნის გაკეთებას შეძლებს მაღაზია? როგორი წესით ჩატარდა გამოკითხვა?

1.4. ჰისტოგრამა, დაჯგუფებული მონაცემები

მონაცემების წარმოდგენისას ხშირად გამოიყენება როგორც სვეტოვანი დიაგრამა, ისე ჰისტოგრამა. ერთი მხრივ აღნიშნული დიაგრამები თითქოს ჰგავს ერთმანეთს, თუმცა არის განსხვავებები, რომლებსაც განვიხილავთ მოცემულ გაკვეთილში.

როგორც ვიცით, სვეტოვანი დიაგრამის შემთხვევაში ჰორიზონტალურ Ox ღერძზე გადაზომილია ცვლადები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე – სიხშირე;

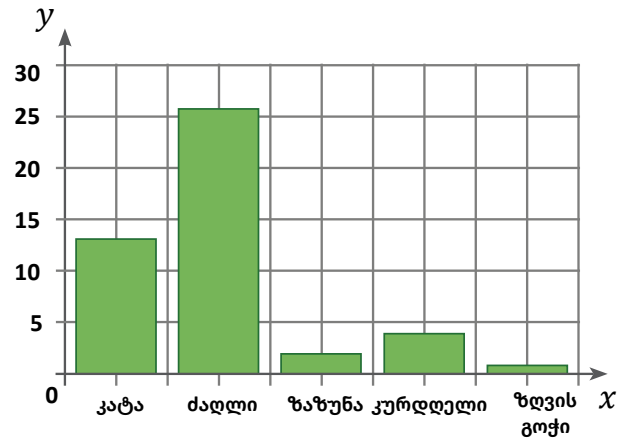
სვეტოვან დიაგრამაზე:

- როგორც ხედავთ, მართკუთხედებს აქვთ ერთი სიგანე
- მართკუთხედის სიმაღლე გვიჩვენებს სიხშირეს;
- მართკუთხედები არ ეხებიან ერთმანეთს.

ჰისტოგრამა გამოიყენება როგორც დისკრეტულ მონაცემების წარმოდგენისთვის, ასევე დაჯგუფებული მონაცემების წარმოდგენისთვის.

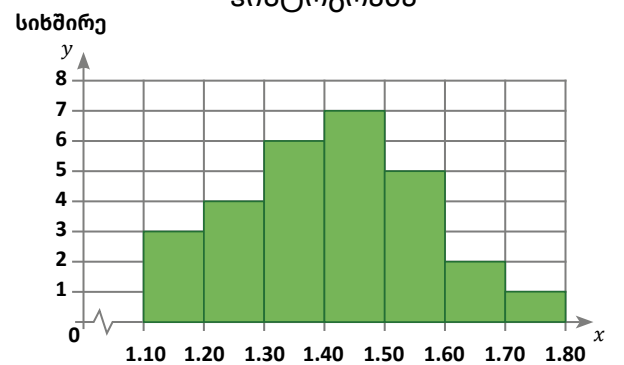
- ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომავთ ინტერვალებს
- ვერტიკალურ ღერძზე შესაბამის სიხშირეს
- ჰისტოგრამის აგების დროს მართკუთხედებს შორის თავისუფალი ადგილი არ არის

სვეტოვანი დიაგრამა



ნახაზი 1

ჰისტოგრამა



ნახაზი 2

წონა (კგ)



წიგნი 1 – როგორ ავაგოთ ჰისტოგრამა?

წინა გვერდზე ნახ.2-ით მოცემულია მონაცემები, განვიხილოთ ამოცანა, რომელსაც შეესაბამება აღნიშნული ჰისტოგრამა.

დავუშვათ, მეთევზემ დაიჭირა თევზები, რომელთა წონებია 1.12; 1.41, 1.42, 1.32, 1.35, 1.44, 1.54, 1.14, 1.51, 1.36, 1.11, 1.61, 1.35, 1.59, 1.47, 1.24, 1.48, 1.72, 1.62, 1.38, 1.39, 1.27, 1.42, 1.44, 1.67, 1.29, 1.52, 1.55.

მოცემულ სიტუაციაში რთულია სვეტოვანი ან წერტილოვანი დიაგრამის აგება, იმიტომ, რომ თევზების წონა მცირედით განსხვავდება ერთმანეთისგან. ასეთ შემთხვევაში, ვაჯგუფებთ მონაცემებს ინტერვალებად, შემდეგნაირად:

ვიღებთ თანაბარ ინტერვალებს და ვადგენთ თითოეულ ინტერვალში მოთავსებული მონაცემების რაოდენობას, ანუ სიხშირეს.

დააკვირდით, როგორ არის ინტერვალები მოცემული;

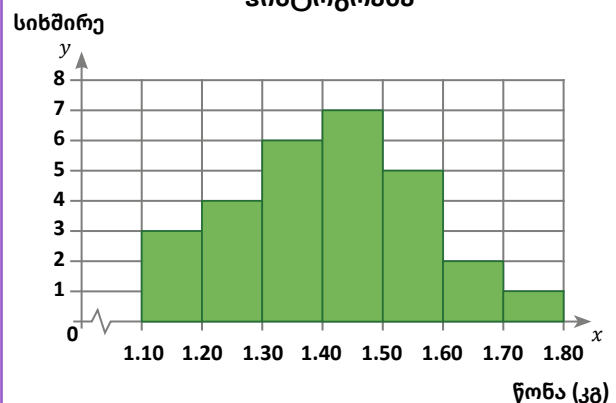
სიხშირის ცხრილის აგება

მონაცემები	სიხშირე
$1.1 \leq x < 1.2$	3
$1.2 \leq x < 1.3$	4
$1.3 \leq x < 1.4$	6
$1.4 \leq x < 1.5$	7
$1.5 \leq x < 1.6$	5
$1.6 \leq x < 1.7$	2
$1.7 \leq x < 1.8$	1
სულ	28

ჰისტოგრამის აგება

ინტერვალებს გადავზომავთ ჰორიზონტალურ ღერძზე, ხოლო შესაბამის სიხშირეს ვერტიკალურ ღერძზე. მართკუთხედები იქნება გვერდიგვერდ, ისე, რომ მათ შორის არ იქნება თავისუფალი სივრცე;

ჰისტოგრამა





სავარჯიშოები

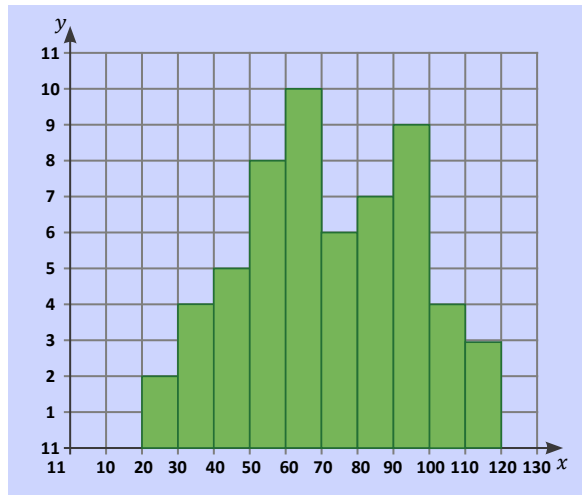
1. აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია

ა) მოცემულია ინფორმაცია მეთევზეზე და მის მიერ დაჭერილ თევზებზე;

ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია თევზის სიგრძე;

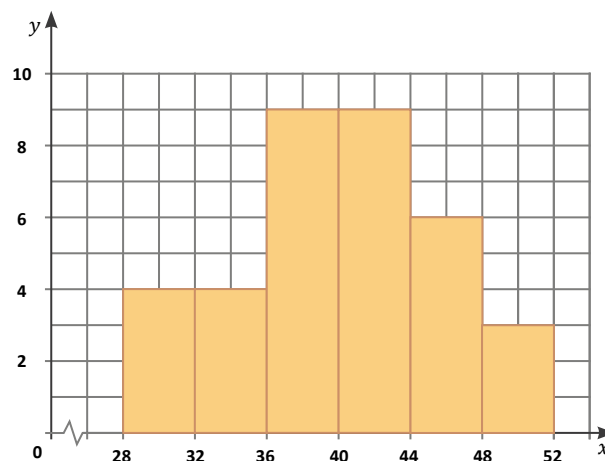
ვერტიკალურ ღერძზე კი თითოეული ინტერვალისთვის დაჭერილი თევზის რაოდენობა.

- აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია;
- სულ რამდენი თევზი დაიჭირა მეთევზემ?
- ყველაზე მეტი რა სიგრძის თევზი დაიჭირა?



ბ) ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია ეხება ერთ-ერთი სახეობის ჩიტების სიგრძეს.

- აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია
- სულ რამდენი ჩიტის სიგრძე დაადგინეს?
- რა იყო ჩიტების მაქსიმალური სიგრძე? ყველაზე გრძელი რამდენი ჩიტი იყო?



2. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რომელიც დაკავშირებულია მამრობითი სქესის ფეხბურთის მოთამაშეების წონასთან.

ცხრილით მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე ააგეთ ჰისტოგრამა;

გაეცით პასუხი კითხვებს:

- რომელი ინტერვალიდან არის ყველაზე მეტი წონის ფეხბურთელი?
- სულ რამდენი ფეხბურთელია ისეთი, რომელთა წონაც არ აღემატება 85 კგ-ს?
- რამდენი მოთამაშის წონაა 90 კგ-ზე მეტი ან ტოლი?

წონა	სიხშირე
$70 \leq x < 75$	2
$75 \leq x < 80$	3
$80 \leq x < 85$	6
$85 \leq x < 90$	8
$90 \leq x < 95$	5
$95 \leq x < 100$	2
სულ	



სავარჯიშოები

3. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რომელიც დაკავშირებულია გამოცდების შედეგებთან:

ცხრილით მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე ააგეთ ჰისტოგრამა;

გაეცით პასუხი კითხვებს:

- რომელი ინტერვალის ქულის შედეგებია ყველაზე მეტი? ყველაზე ნაკლები?
- სულ რამდენი სტუდენტის ქულა აღემატება 70-ს?
- რამდენმა სტუდენტმა მიიღო 80 და მეტი ქულა?
- როგორ არის შესაძლებელი მონაცემთა საშუალოს პოვნა?

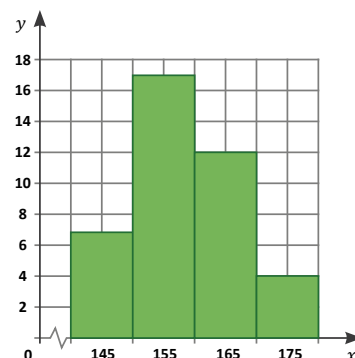
❏ აითიბა: იმისათვის, რომ იპოვოთ საშუალო, ყოველი ინტერვალისა და იმდენი მონაცემი, მაგალითად 25. დაუშვით, რომ აღნიშნული მონაცემის სიხშირეა აღებული სიდიდე და იპოვეთ მიახლოებითი საშუალო.

ქულა	სიხშირე
$20 \leq x < 30$	6
$30 \leq x < 40$	8
$40 \leq x < 50$	14
$50 \leq x < 60$	16
$60 \leq x < 70$	20
$70 \leq x < 80$	26
$80 \leq x < 90$	12
$90 \leq x < 100$	10
სულ	

4. ჩაატარეთ გამოკითხვა, ჰკითხეთ 14-17 წლის ახალგაზრდებს რა არის მათი სიმაღლე. წარმოადგინეთ ინფორმაცია სვეტოვანი დიაგრამის ან ჰისტოგრამის მეშვეობით.
5. ჰისტოგრამით მოცემულია ინფორმაცია, თუ რა თანხა ეხარჯება ოჯახს კვირის განმავლობაში საკვები პროდუქტების შესაძენად;

ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- რამდენი ოჯახი ხარჯავს 155 ლარს კვირაში?
- რამდენი ოჯახი ხარჯავს 165 ლარს კვირაში?
- რა არის განსხვავება უდიდეს და უმცირეს მონაცემს შორის?



სავარჯიშოები

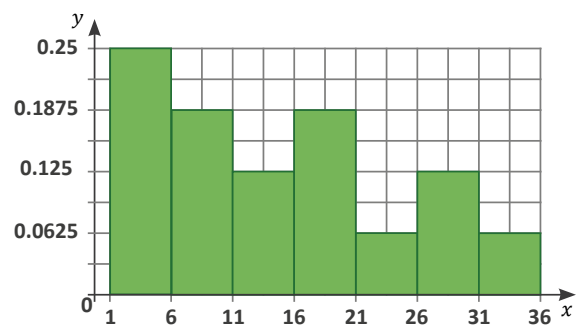
6. ქვემოთ მოცემულია 50 სირაქლემას წონა. მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე ააგეთ ჰისტოგრამა.

33	19	24	35	36	24	29	29	29	34
38	35	35	35	36	60	35	50	34	48
41	41	51	42	35	36	32	61	30	40
41	19	33	34	17	35	35	38	35	42
20	29	50	33	37	28	49	58	45	40

7. ქვემოთ მოცემული ინფორმაცია გვიჩვენებს საქველმოქმედო ღონისძიებაზე გაყიდული ნივთების რაოდენობას, ფასთან მიმართებით. სულ აუქციონზე გატანილი იყო 36 ნივთი.

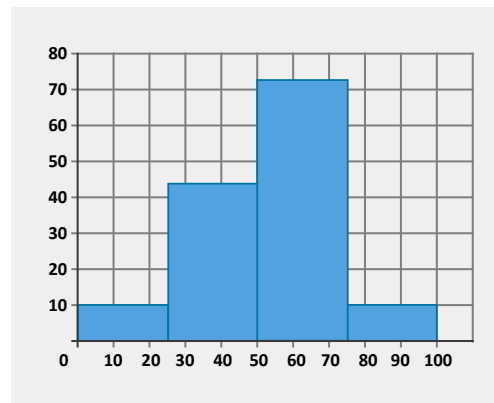
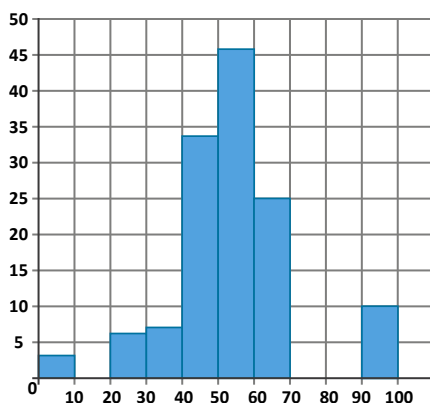
ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია ფასი, ხოლო ვერტიკალურზე **ფარდობითი სიხშირე**.

- 11-16 ლარის ღირებულების რამდენი ნივთი გაიყიდა?
- 1-6 ლარის ღირებულების რამდენი ნივთი გაიყიდა?



8. ქვემოთ მოცემულია ორი ჰისტოგრამა. ორივე დიაგრამაზე ჰორიზონტალურ ღერძზე ნაჩვენებია წონა, ხოლო ვერტიკალურზე – სიხშირე;

- რა შეგიძლიათ თქვით აღნიშნული ჰისტოგრამებიდან გამომდინარე?
- რა შეგიძლიათ თქვით ინტერვალზე?
- შეადარეთ ერთმანეთს ჰისტოგრამებით მოცემული ინფორმაცია.



1.5. მედიანა, მოდა, საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი

წინა თავებში ჩვენ უკვე ვისწავლეთ, როგორ შეიძლება გამოვითხოვოთ ორგანიზება, კვლევის დაგეგმვა, მონაცემების წარმოდგენა.

მონაცემების შეგროვების შემდეგ აუცილებელია მონაცემების დამუშავება.

ამოცანების ამოხსნისას შევნიშნეთ, რომ არსებობს მონაცემები, რომლებიც ხშირად მეორდება. ვიპოვეთ მონაცემების სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე. არსებობს მონაცემების დამუშავების წესი, რომლის მეშვეობითაც პოულობენ მონაცემების:

- საშუალოს
- მედიანას
- მოდას

მაგალითი სპორტიდან: ნიმუში როგორ ვიპოვოთ მედიანა, მოდა, საშუალო

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, ლიონელ მესის მიერ 12 წლის განმავლობაში წელიწადში გატანილი გოლების რაოდენობის შესახებ ჩემპიონთა ლიგის თამაშის დროს.

წელი	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007
გოლი	6	6	11	6	10	8	8	14	12	8	9	6

დავამუშაოთ ინფორმაცია, ვიპოვოთ მედიანა, მოდა და საშუალო.

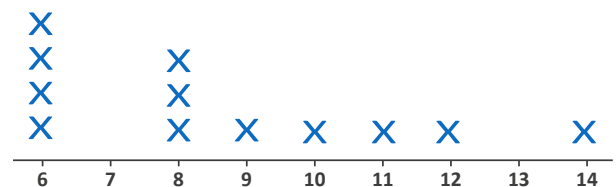
მონაცემების დამუშავებამდე, იმისათვის, რომ შევძლომისაგან თავი დავიზღვიოთ, ჩავწეროთ მონაცემები ორგანიზებულად, გადავიტანოთ მონაკვეთზე ან სიხშირის გამომსახველ ცხრილში.

დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით:



საშუალოს (საშუალო არითმეტიკულს), მედიანასა და მოდას ცენტრალური ტენდენციის საზომი ეწოდება.

[ტელესკოპი](#)



6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----

მონაცემების
მოდა

- მონაცემების **მოდა** არის რიცხვი, რომელიც ყველაზე ხშირად მეორდება მონაცემებში.

ზემოთ მოყვანილ ნიმუშში, მონაცემებში რიცხვი 6 გამოვლინდა 4-ჯერ, ე.ი. მონაცემების მოდა არის 6.

შენიშვნა: მონაცემებს შეიძლება ჰქონდეს ორი ან მეტი მოდა, მაგ.:

მონაცემების
საშუალო

მონაცემების საშუალო არის, მონაცემების ჯამის შეფარდება მათსავე რაოდენობასთან. (საშუალო, იგივე საშუალო არითმეტიკული გამოისახება სიმბოლოთი $\bar{x}$).

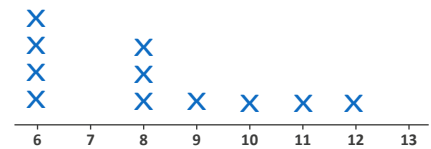
$$\text{საშუალო } \bar{x} = \frac{6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14}{12} = \frac{104}{12} = 8 \frac{2}{3}$$

აღნიშნულ მაგალითში გვაქვს 12 წლის განმავლობაში თითოეულ წელს გატანილი გოლების რაოდენობა.

ვხედავთ 6 გოლი განმეორდა 4-ჯერ, 8-3 ჯერ და ა.შ.

საშუალო

$$\frac{6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14}{12} = \frac{104}{12} = 8 \frac{2}{3}$$



საშუალოს გამოთვლა გამარტივდება თუ მონაცემები გვექნება ორგანიზებული სიხშირის ცხრილის ან წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით:

გამომდინარე იქიდან, რომ გოლების რაოდენობა ნატურალური რიცხვით აღიწერება, ჩვენ შეგვიძლია დავამრგვალოთ ერთეულამდე და ვთქვათ, რომ მესი საშუალოდ, ჩემპიონთა ლიგაზე წლიურად იტანს 9 გოლს.

მონაცემების
მედიანა

- მონაცემების **მედიანა** არის ზრდის (ან კლების) მიხედვით დალაგებულ მონაცემებში შუა ელემენტი (მონაცემი). თუ გვაქვს მონაცემთა კენტი რაოდენობა, მაშინ შუა ელემენტი, ხოლო თუ გვაქვს მონაცემების ლუწი რაოდენობა მაშინ შუა ორი ელემენტის საშუალო არითმეტიკული არის მედიანა.

6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14
6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14

ლუწი რაოდენობის მონაცემის შემთხვევაში მედიანა შუა ორი წევრის ჯამის ნახევარია: $\frac{8 + 8}{2} = 8$

შენიშვნა: როდესაც გვაქვს კენტი რაოდენობის მონაცემი, მაშინ მედიანა შუა წევრია:

მაგ., 2 3 5 8 9

მედიანა = 5

მონაცემების
დიაპაზონი
(გაბნევის
დიაპაზონი)

- მონაცემების დიაპაზონი – **გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება მონაცემების მაქსიმუმის და მინიმუმის სხვაობას.

მაგალითის შემთხვევაში დიაპაზონია: $14 - 6 = 8$.

2	5	5	5	5	7	8	8	8	8	12	14	14	14	14	18	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	-----

მონაცემების მოდა 5; 8; 14 თითო მონაცემი მეორდება 4-4 ჯერ

!! ყურადღება მიაქციეთ:

საშუალომ შეიძლება არაობიექტური სურათი მოგვცეს ერთი წესრიგიდან ამოვარდნილი მინიმალური ან მაქსიმალური მონაცემის გამო. აღნიშნულ მაგალითში 100 ძალიან არის დაშორებული და გაცილებით მეტია ძირითად და უმეტეს მონაცემებზე, ამიტომ 100-მა შეიძლება რადიკალურად შეცვალოს საშუალო. კვლევებისთვის მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ: **მედიანა, მოდა, საშუალო და გაბნევის დიაპაზონი.**

მედიანას, მოდას და საშუალოს ცენტრალური ტენდენციის საზომი ერთეულები ეწოდებათ.



ნოუტი 1

კომპანიაში დასაქმებულია 12 თანამშრომელი, ქვემოთ მოცემულია მათი ხელფასები; იპოვეთ საშუალო, მოდა და მედიანა.

ხელფასები: 1200, 1200, 1200, 1200, 1200, 1500, 1500, 1800, 1800, 2000, 2400, 15 000

მოდა:

როგორც ვხედავთ, ყველაზე ხშირად გამოვრებადი მონაცემია 1200; გამოდის, რომ მოდა არის 1200

მედიანა:

მონაცემები დალაგებულია ზრდადობით, სულ არის 12 მონაცემი, გამომდინარე აქედან, მედიანა იქნება მეექვსე და მეშვიდე მონაცემის საშუალო:

$$\frac{1500 + 1500}{2} = 1500$$

დიაპაზონი:

მინიმალური მონაცემი – 1200

მაქსიმალური მონაცემი – 15 000

დიაპაზონი = 15000 – 1200 = 13 800

საშუალო არითმეტიკული:

საშუალო არითმეტიკული ნიშნავს მონაცემების ჯამი გაყოფილი რაოდენობაზე; ხშირად, მოსახერხებელია ცხრილში დაორგანიზება და ისე დათვლა ჯამის.

მონაცემები სიხშირის ცხრილში:

მონაცემი	სიხშირე	ჯამური მნიშვნ.
1200	5	6000
1500	2	3000
1800	2	3600
2000	1	2000
2400	1	2400
15 000	1	15 000
სულ		32 000

$$\text{საშუალო} = \frac{32\,000}{12} \approx 2667$$

როგორც ვხედავთ, საშუალო არ ასახავს ობიექტურ სურათს, იმიტომ, რომ ერთ-ერთი თანამშრომლის ხელფასი არის **მონაცემებიდან ამოვარდნილი;**

დიაპაზონიც მონაცემებს შორის არის დიდი;



სავარჯიშოები

1. წარმოდგინეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილის მეშვეობით და იპოვეთ მოცემული მონაცემების: მედიანა, მოდა, საშუალო და დიაპაზონი.

გაანალიზეთ სიტუაცია:

- ა) 4 ; 1; 2; 1; 4; 5; 6; 1; 3; 5; 6; 4; 4; 1; 3;
 ბ) 2 ; 1; 1; 1; 4; 2; 5; 8; 1; 1; 2; 8; 100; 5; 10;
 გ) 150 ; 120; 120; 100; 180; 80; 200; 10; 200; 100.

2. მოცემული ცხრილები ასახავს ორი კალათბურთის ტურნირის დროს ორი კალათბურთელის მიერ დაგროვებულ ქულათა რაოდენობას 5 თამაშის განმავლობაში.

მოცემული ცხრილის მიხედვით იპოვეთ:

- ა) პირველი კალათბურთელის მონაცემების: მედიანა, მოდა და საშუალო.
 ბ) მეორე კალათბურთელის მონაცემების: მედიანა, მოდა და საშუალო.
 გ) შეადარეთ კალათბურთელების მონაცემები.
 როგორ და როდის შეიძლება გამოიყენოს მწვრთნელმა აღნიშნული მონაცემები?

კალათბურთელი N 1

თამაში	1	2	3	4	5
ქულა	19	14	14	11	17

კალათბურთელი N 2

თამაში	1	2	3	4	5
ქულა	22	11	8	8	16

3. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების ცენტრალური ტენდენციის საზომი ერთეულები: მედიანა, მოდა და საშუალო, ასევე გაბნევის დიაპაზონი.

- ა) 4 ,1,7,5,3,8,200; ბ) 7,1 ,2,5,0,2,0,1; გ) 2,6,3,8,3,5,10,2; დ) 7 ,2,4,5,1,0,6,10.

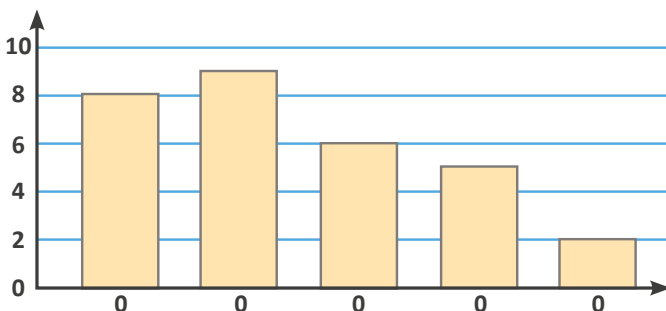
4. სამმა მეგობარმა გადაწყვიტა საახალწლოდ მოხუცთა თავშესაფარში მიეტანათ ტკბილეული და იყიდეს სხვადასხვა კანფეტი. კანფეტების წონის საშუალო არის 30 კგ, რამდენი კილოგრამი იყიდა პირველმა მეგობარმა, თუ მეორემ იყიდა 40 კგ და მესამემ 15 კგ?

5. დიაგრამით მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ მონაცემების მედიანა, მოდა, საშუალო და დიაპაზონი.

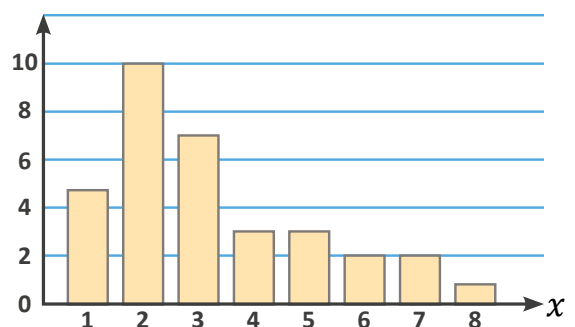


რეკომენდაცია: შეგიძლიათ ინფორმაცია ჯერ დააორგანიზოთ ცხრილში

ა)

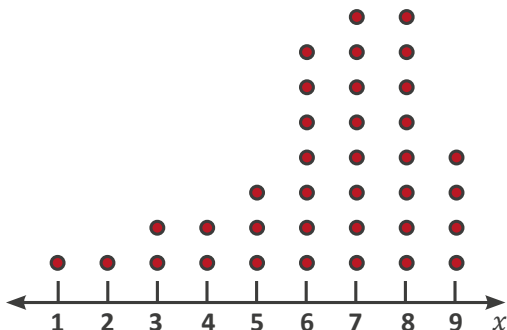


ბ)

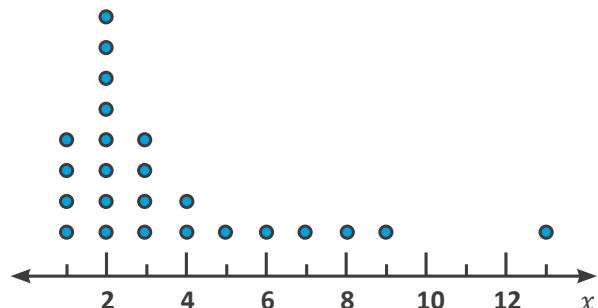


სავარჯიშოები

ბ)



დ)



6. ცხრილში მოცემულია ბაკურიანში იანვრის თვის ტემპერატურა. მოცემული ინფორმაციაზე დაყრდნობით, იპოვეთ საშუალო ტემპერატურა, ასევე ტემპერატურის მედიანა და მოდა.

თარიღი	1.02	2.02	3.02	4.02	5.02	6.02	7.02	8.02	9.02	10.02
°C	2°C	4°C	-1°C	-3°C	0°C	5°C	8°C	2°C	-4°C	-3°C

7. ყოველწლიურად ამერიკის შეერთებულ შტატებში სხვადასხვა ქვეყნიდან საცხოვრებლად ბევრი ადამიანი ჩადის. ერთ-ერთი წლის მონაცემები რამდენიმე ასეთი ქვეყნის შესახებ ცხრილითაა მოცემული.

ინდოეთი	ჩინეთი	რუსეთი	მექსიკა	ფილიპინები	კუბა
45800	43800	22700	160500	58900	28500

- იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო;
 - მონაცემები წარმოადგინეთ პოლიგონის სახით;
 - აშშ-ში ამ წელს ჩასული მოსახლეობის რამდენი პროცენტია აზიის კონტინენტიდან?
 - რამდენი პროცენტით მეტი ჩავიდა აშშ-ში ამ წელს ამერიკის კონტინენტიდან აზიის ქვეყნებთან მიმართებაში?
8. მოცემულია 6 მთელი რიცხვი. უმცირესი რიცხვი არის 8, უდიდესი 14. ამ რიცხვების მედიანა, მოდა და საშუალო არის 11-ის ტოლი. რას უდრის დანარჩენი ოთხი რიცხვი? იპოვეთ ერთი სავარაუდო პასუხი.
9. მოცემულია 7 მთელი რიცხვი, რომელთაგან უმცირესი 10-ის ტოლია, უდიდესი – 20-ის. იპოვეთ დანარჩენი ხუთი რიცხვი თუ ვიცით, რომ მედიანა არის 16, მოდა – 12 და საშუალო 15-ის ტოლი.
10. ექვსი რიცხვის საშუალო 8-ის ტოლია, სხვა ექვსი რიცხვის საშუალო კი – 20-ის. რის ტოლი იქნება მოცემული 12 რიცხვის საშუალო?
11. მაკომ პირველ სამ ტესტში 100 დან 89 ქულა მიიღო, მეოთხე ტესტში 100-დან – 92 ქულა. რა ქულა უნდა მიიღოს მაკომ მეხუთე ტესტში, რომ საშუალო ქულა გამოუვიდეს 90?
12. ოთხ მათემატიკის ოთხ ტესტში ზედრიგად აიღო 100-დან 95 ქულა, შემდეგ ავადმყოფობის გამო გააცდინა მეოთხე ტესტი და მიიღო 0 ქულა, ამის შემდეგ მას დასაწერი აქვს კიდევ ორი ტესტი. მიუხედავად იმისა, რა ქულა უნდა მიიღოს ოთხ მომდევნო ორ ტესტში, რომ საშუალო ქულა გამოუვიდეს 85?

სავარჯიშოები

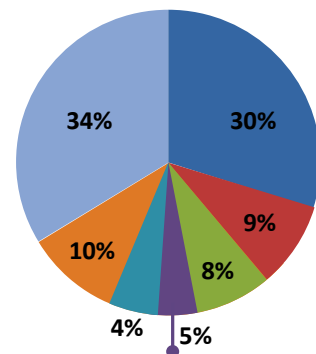
13. მოცემული ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 120-ის ტოლია, სხვა 5 რიცხვის საშუალო არითმეტიკული კი – 90-ს, რა იქნება მოცემული ყველა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?
14. მოცემული ხუთი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 70-ის ტოლია, ამ რიცხვებიდან ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 60-ის, რას უდრის მეხუთე რიცხვი?
15. თორნიკე და მარიამმა მაღაზიაში იყიდეს 8კგ შოკოლადის კანფეტი, კილოგრამი – 8.5 ლარად და 12 კგ კანფეტების ასორტი, კილოგრამი – 6.5 ლარად. რა იქნება კანფეტების კილოგრამის საშუალო ფასი?
16. ინტერნეტის მეშვეობით, მოიძიეთ თქვენი საყვარელი სპორტსმენის ბოლო 10 თამაშის შედეგები და იპოვეთ მოძიებული მონაცემების: მედიანა, საშუალო, მოდა და დიაპაზონი.
17. ვიქტორიას უნდა დაედგინა უყვარს თუ არა მოსახლეობას სატელევიზიო სერიალები. ამისათვის, იგი დადგა მეტროსთან და გამოიკითხა ყოველი მეხუთე გამვლელი, რამდენად ობიექტურ სურათს მოგვცემს ვიქტორიას გამოკითხვა?
18. დიაგრამაზე მოცემულია ინფორმაცია თუ როგორ ანაწილებს დროს სტუდენტი ერთი წლის განმავლობაში.

მოცემულია აქტივობები:

- კოლეჯი
- ძილი
- სპორტი
- დავალებების შესრულება
- კვება
- კომპიუტერი
- დასვენება



დროის განაწილება



- რას უთმობს ყველაზე ნაკლებ დროს სტუდენტი?
- რას უთმობს ყველაზე მეტ დროს?
- რა არის თანაფარდობა კოლეჯში გატარებულ დროსა და ძილს შორის?
- წარმოადგინეთ მოცემული მონაცემები სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით
- 24 საათიდან რამდენ საათს უთმობს თითოეულ აქტივობას სტუდენტი?
- თუ ავიღებთ 200 საათს, რა აქტივობას რა დროს უთმობს სტუდენტი?
- შეადგინეთ დიაგრამა, თქვენ რა დროს უთმობთ თითოეულ აქტივობას?

19. **გამოწვევა:** 25 კაციანი ჯგუფის საგამოცდო შედეგები წარმოდგენილია სიხშირული ცხრილის სახით. ჯგუფის საშუალო შეფასებაა 1.08.

შეფასება	0	1	2	3	4	5	ჯამი
სიხშირე	15	3	2	1	x	y	25

1. იპოვეთ ყველაზე მაღალი შეფასების სიხშირეები (x და y)
2. იპოვეთ მოდა და მედიანა

მონაცემები წარმოადგინეთ წრიული დიაგრამის სახით, სადაც ყოველი ნიშნის სექტორზე მონიშნული იქნება მისი პროცენტი

1.6. მონაცემთა განაწილების ფორმები

მოდა არის მონაცემთა განაწილებაში ყველაზე ხშირად განმეორებადი მონაცემი. მონაცემთა სიხშირეთა განაწილებამ შეიძლება მიიღოს განსხვავებული ფორმები. იმის მიხედვით თუ სად აღმოჩნდება მოდა.

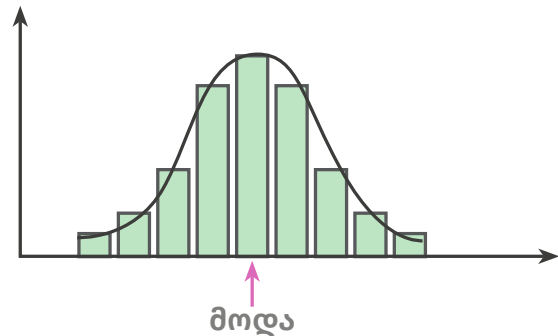
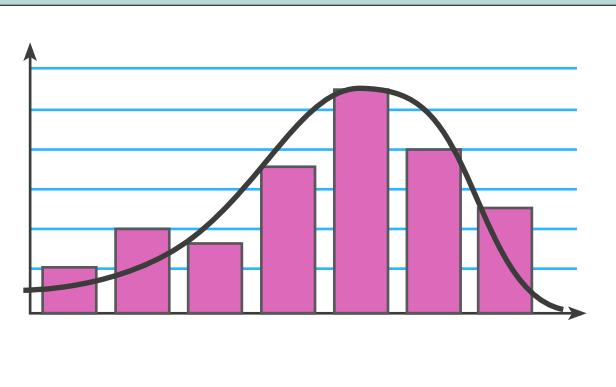
განაწილების 3 ძირითადი ფორმა მოყვანილია ქვემოთ. წყვეტილი ხაზი მიაწინებს მონაცემთა მოდაზე.

ასიმეტრიული ეწოდება განაწილებას, როდესაც მონაცემები თავმოყრილია განაწილების ერთ ბოლოში განაწილების მეორე ბოლოში (ე.წ. კუდში) განლაგებულია იშვიათად დაფიქსირებული მონაცემები.

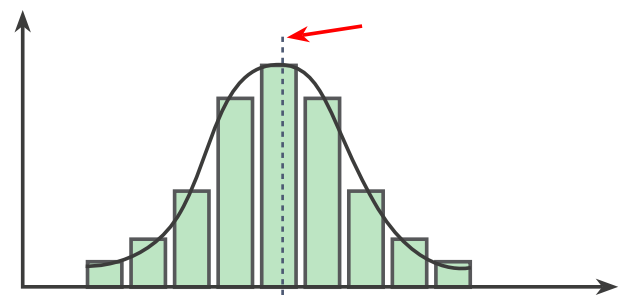


ნიშუი 1

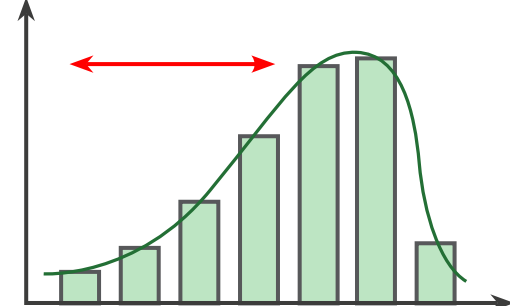
განხილული მაგალითის მიხედვით, განაწილება არის უარყოფითად ასიმეტრიული.



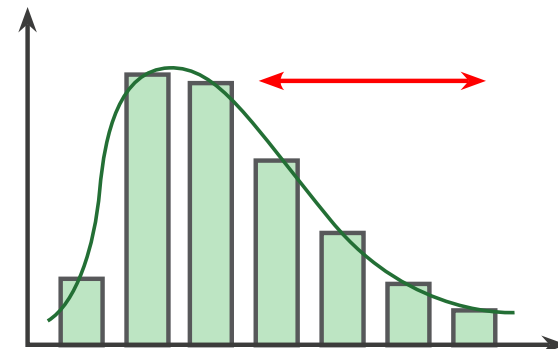
■ სიმეტრიული განაწილება



■ უარყოფითად ასიმეტრიული



■ დადებითად ასიმეტრიული





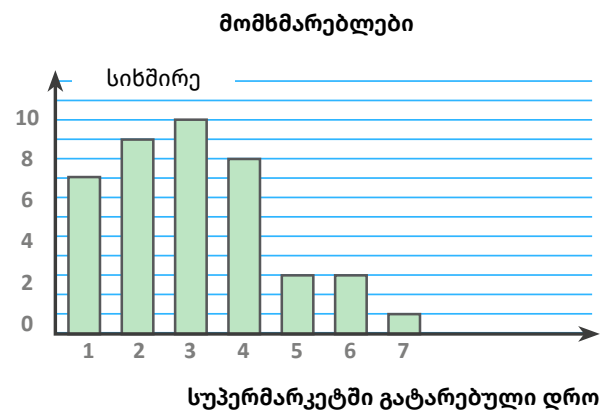
სავარჯიშოები

1. გამოკითხეს შემთხვევითი წესით შერჩეული მომხმარებლები. მათ დაუსვეს კითხვა: „რამდენჯერ იყავით საყიდლებზე სუპერმარკეტში ბოლო კვირას?“

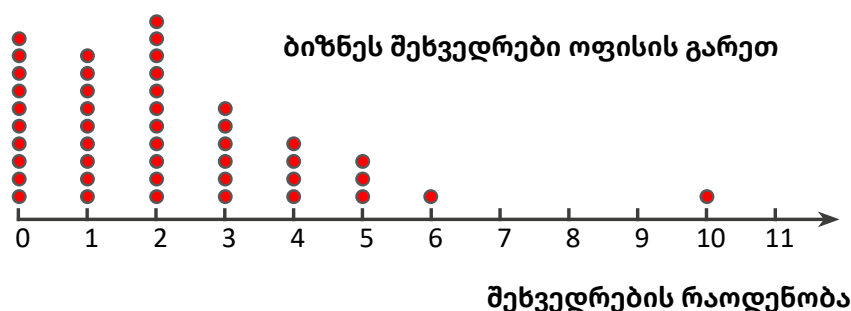
მონაცემთა დამუშავების შემდეგ, წარმოადგინეთ სვეტოვანი დიაგრამის სახით.

დიაგრამიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

- რამდენმა მომხმარებელმა მიიღო მონაწილეობა გამოკითხვაში?
- რამდენი მომხმარებელი იყო საყიდლებზე ერთხელ, ორჯერ?
- რამდენი პროცენტი მიდის საყიდლებზე სუპერმარკეტში 5-ჯერ და მეტჯერ?
- აღწერე მონაცემთა განაწილება.



2. ერთ-ერთი კომპანიის თანამშრომლებს სთხოვეს ჩაენიშნათ, რამდენჯერ უხდებოდათ კვირის განმავლობაში ოფისის დატოვება საქმიანი შეხვედრების გამო. დიაგრამაზე მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.



უპასუხეთ შეკითხვებს:

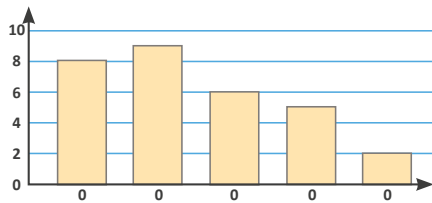
- რა არის ცვლადი ამ კვლევაში?
- ახსენით, რატომაა ეს მონაცემები დისკრეტული რიცხვითი მონაცემები?
- რამდენმა პროცენტმა არ დატოვა ოფისი?
- რამდენმა პროცენტმა დატოვა ოფისი 5-ჯერ და მეტჯერ?
- რომელია ამ მონაცემების ყველაზე ხშირად განმეორებადი მონაცემი?
- როგორ დაახასიათებდი მონაცემს, რომლის მნიშვნელობა არის 10-ის ტოლი?



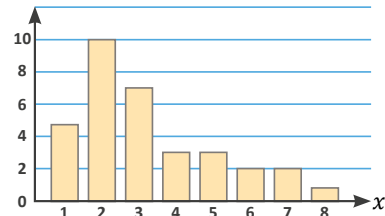
სავარჯიშოები

3. როგორ არის განაწილებული მონაცემები დიაგრამაზე?

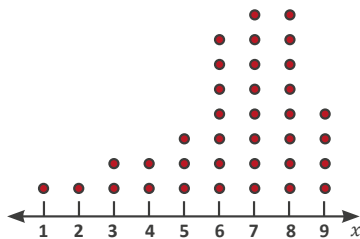
ა)



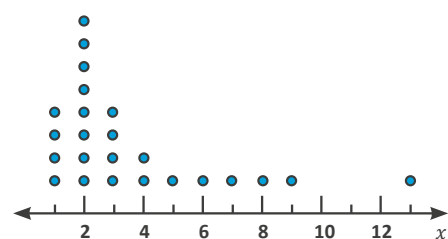
ბ)



გ)



დ)



გამეორება

4. ცხრილში მოცემულია ფრენბურთის გუნდის მოთამაშეთა წონები.

ა) ცხრილის მიხედვით, ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა. გარკვევით დაიტანეთ ღერძებზე ინტერვალები, გაითვალისწინეთ, რომ ჰისტოგრამის დასათაურება აუცილებელია;

ბ) აღწერეთ როგორია მონაცემთა განაწილება;

წონა (კგ)	სიხშირე
$75 < x \leq 80$	2
$80 < x \leq 85$	5
$85 < x \leq 90$	8
$90 < x \leq 95$	7
$95 < x \leq 100$	5
$100 < x \leq 105$	1

5. პროფესიულმა სასწავლებელმა გამოიკითხა 50 სტუდენტი, იმის გასარკვევად თუ რა დროს ხარჯავდნენ ისინი სასწავლებელში მისვლამდე. მოცემულია მონაცემები წუთებში:

16	8	10	17	25	34	42	18	24	18	45	33	40
3	20	12	10	10	27	16	37	45	15	16	26	16
14	18	15	27	19	32	6	12	14	20	10	16	
21	25	8	32	46	14	15	20	18	8	10	25	

ა) როგორ დაახასიათებდით დროს?

ბ) დაალაგეთ მონაცემები ზრდის მიხედვით;

გ) როგორია მონაცემთა განაწილება?

მონაცემების დამუშავება მართკუთხედის ფორმის ყუთისა და მონაკვეთის მეშვეობით (Box and Whisker Plot)

ტელესკოპი



9:30-დან განიხილება
აღნიშნული საკითხი



კვლევა

ინტერნეტის მეშვეობით მოიპოვეთ ინფორმაცია და შეადარეთ აღნიშნული მეთოდით თქვენი საყვარელი სპორტსმენების მონაცემები და დაადგინეთ, რომელი უფრო ეფექტური მოთამაშე იყო წლის განმავლობაში.



დაფიქრდით:

შეიძლება თუ არა ერთი მოთამაშის მაქსიმუმი იყოს მეორეზე გაცილებით მაღალი, მაგრამ მეორე მოთამაშე გაცილებით ეფექტური და სტაბილური მოთამაშე იყოს? როგორი სახე ექნება მსგავსი სიტუაციის დიაგრამას?

აღნიშნულ მონაცემთა დამუშავების წესით, ხშირად ხდება ორი სპორტსმენის ან ორი კომპანიის მონაცემების შედარება, იმისათვის, რომ მიიღონ გადაწყვეტილება, რომელი უფრო ეფექტური ან მომგებიანი იქნება.

ვთქვათ, მოცემულია რამდენი ქულა მოუტანა რომელიმე კალათბურთელმა გუნდს ბოლო 12 თამაშში: 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 9, 10, 12, 12, 14.

ვისწავლოთ მონაცემების დამუშავების და წარმოდგენის კიდევ ერთი ძალიან პრაქტიკული მეთოდი. აღნიშნული მეთოდი მოიცავს შემდეგ ნაბიჯებს:

- ვიპოვოთ მონაცემების მედიანა
- მედიანის მეშვეობით გავყოთ მონაცემები ორ ნაწილად და ვიპოვოთ ზედა და ქვედა დანაყოფის მედიანები (წესი: მონაცემებს ვყოფთ შუაზე და ვპოულობთ ცალ-ცალკე თითოეული ნახევრის მედიანებს).
- ვიპოვოთ მონაცემების მაქსიმუმი და მინიმუმი.
- წარმოვადგინოთ მონაცემები მონაკვეთზე შემდეგი წესით:

მაქსიმუმი	14
მინიმუმი	4
მედიანა (Q_2)	8
მარცხენა ნახევრის მედიანა (ქვედა კვარტილი Q_1)	6
მარჯვენა ნახევრის მედიანა (ზედა კვარტილი Q_3)	11

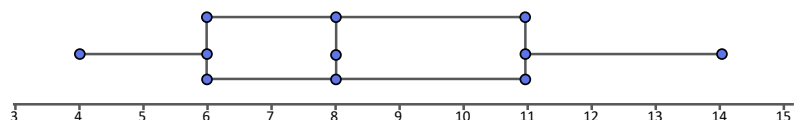


წარმოვადგინოთ მონაცემები რიცხვით სხივზე შემდეგი წესით:

- გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე მონაცემების მინიმუმი და მაქსიმუმი, შესაბამისად 4 და 14.
- გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე მედიანა 8.

გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე ქვედა და ზედა დანაყოფების მედიანები (კვარტილები), 6 და 11.

- შევაერთოთ მართკუთხედით მედიანები ისე, როგორც ქვემოთ დიაგრამაზეა ნაჩვენები
- შევაერთოთ მართკუთხედის გვერდები მინიმუმთან და მაქსიმუმთან.



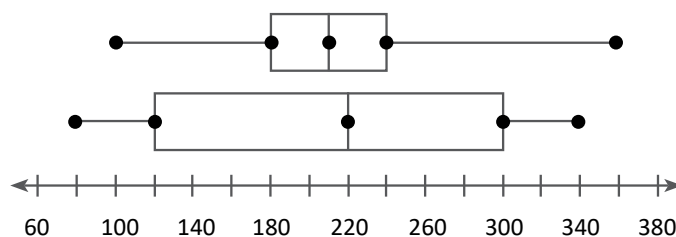
ზედა და ქვედა კვარტილების სხვაობა გვიჩვენებს თუ როგორ არის განაწილებული მონაცემები მედიანასთან მიმართებით. აღნიშნული დიაგრამა გვაძლევს საშუალებას გავანალიზოთ და შევადაროთ ორი სიმრავლე მონაცემებისა.

სავარჯიშოები

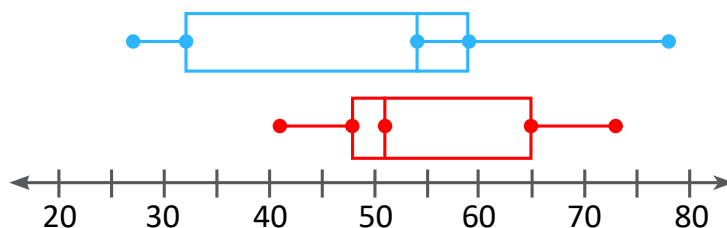


■ MATH Lab – გაანალიზეთ შემდეგი დიაგრამა

1. აღნიშნული დიაგრამა გვაწვდის ინფორმაციას ორი კომპანიის გაყიდვების რაოდენობაზე. რისი თქმა შეგვიძლია? რომელი უფრო ეფექტურად მუშაობს? თქვენი აზრით, რომელია მეტად სტაბილური კომპანია გაყიდვებში?

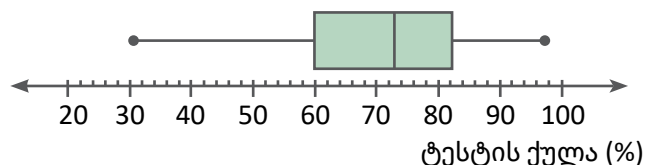


2. ქვემოთ დიაგრამით შედარებულია ორი მეწარმის მიერ დღეში გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა (ჩავთვალოთ, რომ მეწარმეები ყიდიან ერთსა და იმავე პროდუქციას). N1-მეწარმის დიაგრამა მოცემულია ლურჯი ფერით, N2 მეწარმის – წითელი ფერით.



- რომელ დიაგრამაზეა მედიანა მეტი?
- რომელი დიაგრამით არის მოცემული უფრო დიდი დიაპაზონი?
- რას უდრის ზედა და ქვედა ნახევრების მედიანების სხვაობა და რატომ შეიძლება იყოს აღნიშნული ინფორმაცია საჭირო? გამოთქვით ვარაუდი

3. სურათზე მოცემული ყუთისებრი დიაგრამა გვიჩვენებს, კლასის მიერ ტესტში დაგროვებული ქულების განაწილებას. მისი მიხედვით უპასუხეთ:



- ა) რამდენი იყო: 1) ყველაზე მაღალი ქულა?



სავარჯიშოები

II) ყველაზე დაბალი ქულა?

ბ) რამდენი იყო ქულათა მედიანა?

გ) რამდენი იყო გაბნევის დიაპაზონი?

დ) თუ შენ დააგროვე 70 ქულა, მაშინ მოხვდები თუ არა საუკეთესო ქულების მქონე სტუდენტების 50%-ში?

გამოთქვი მოსაზრება მოცემული ყუთისებრი დიაგრამის სიმეტრიულობის შესახებ.

4. მარიამმა გადაწყვიტა დაითვალოს და აღწეროს 33 სხვადასხვა პარკში არსებული ვაშლების რაოდენობა. მან ასეთი შედეგი მიიღო:

5, 8, 10, 4, 2, 12, 6, 5, 7, 7, 5, 5, 5, 13, 9, 3, 4, 4, 7, 8, 9, 5, 5, 4, 3, 6, 6, 6, 6, 9, 8, 7, 6.

ა) იპოვე მონაცემთა მედიანა, ზედა და ქვედა მეოთხედები;

ბ) დახაზე ამ მონაცემების შესაბამისი ყუთისებრი დიაგრამა.

5. ქვემოთ ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია თუ დღის განმავლობაში რამდენი საათი სძინავს მოსწავლეს და რამდენი მასწავლებელს;

- წარმოადგინეთ მონაცემები ყუთისებრი ფორმის დიაგრამით (Box and Whisker plot)
- გააანალიზეთ მონაცემები

	ძილის დროის საშუალო ხანგრძლივობა ყოველ დღე
მოსწავლე	9, 7, 10, 6, 11, 7, 9, 10, 10, 7, 9, 10, 8, 9, 11
მასწავლებელი	7, 6, 8, 9, 8, 7, 10, 6, 7, 9, 6, 7, 5, 7, 8



დასტის ნიშნობა

1. დემეტრემ და საბამ გადაწყვიტეს ჩაეტარებინათ კვლევა, რომელი ტელეფონი უფრო ურჩევნიათ მომხმარებლებს: აიფონი თუ სამსუნგი? დაადგინეთ:

- რომლის კვლევის შედეგი იქნება უფრო მიახლოებული რეალობასთან?
- რა მეთოდით ჩაატარა კვლევა საბამ და რა მეთოდით დემეტრემ?

კითხვა: აიფონით უფრო კმაყოფილი ხართ თუ სამსუნგით?	
კვლევის წესი	შედეგები
დემეტრე გამოკითხა შემთხვევით მეტ-როდან ამოსული 800 ადამიანი.	65 % — მოსწონს სამსუნგი
საბამ გამოკითხა აიფონის მაღაზიიდან გამოსული მომხმარებელი	95 % — მოსწონს აიფონი

მენიშვნა: ამოცანაში მოცემული მონაცემები არ არის რეალური კვლევიდან აღებული.

2. დაწერეთ კვლევის რომელი მეთოდი უნდა იყოს გამოყენებული ჩამოთვლილი საკითხების ანალიზისთვის? (უნდა აღიწეროს სრული მოსახლეობის ანუ პოპულაციის თუ შერჩევითი შერჩევის წესით გამოკითხვა საკმარისია?).

- ა) რომელია ყველაზე პოპულარული კომპიუტერული თამაში?
- ბ) 15 წლამდე მოსწავლეებს კალათბურთის ყურება უფრო უნდათ თუ ფეხბურთის?
- გ) გაიზარდა თუ არა შობადობის რიცხვი წელს წინა წელთან შედარებით?

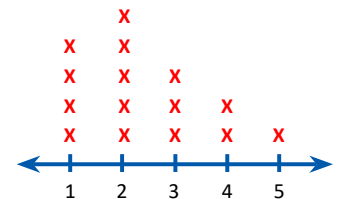
3. იპოვეთ მოცემული მონაცემების მედიანა, მოდა, საშუალო და დიაპაზონი:

4 2 5 1 1 2 7 9 1.

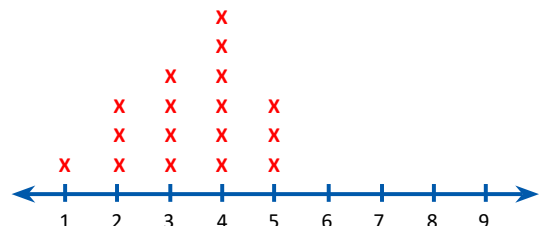
4. სიხშირის მონაკვეთზე განთავსებული მონაცემების მიხედვით, იპოვეთ:

მონაცემების მედიანა, მოდა და საშუალო.

ნახაზზე მოცემული რიცხვები.

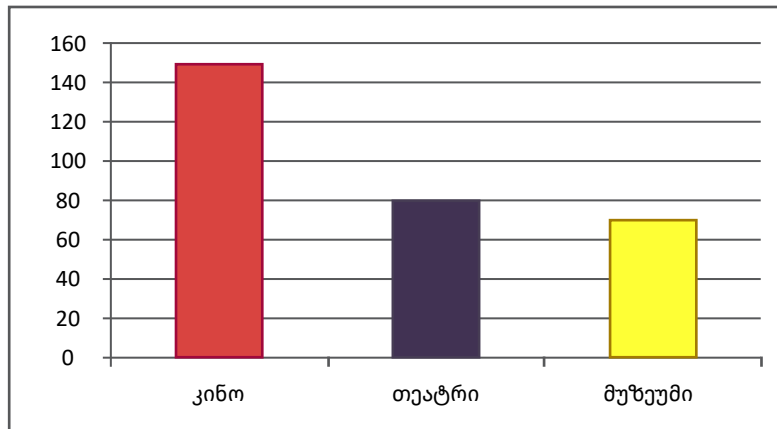


5. უნივერსიტეტის საკალათბურთო გუნდს ჰყავს 4500 ერთგული გულშემატკივარი, რომელთა ნაწილი შეჯიბრებებზე მუდმივად დადის გუნდის კალათბურთის მაისურებით. ლუკამ გამოკითხვა ჩაატარა შემთხვევითი შერჩევის წესით და ჰკითხა გულშემატკივრებს: ვინ ჩაიცვამდა მაისურს მომავალი თამაშისთვის? გამოკითხული 30 გულშემატკივრიდან 24-მა განაცხადა, რომ მოვიდოდა მაისურით. რა ვარაუდის გამოთქმა შეუძლია ლუკას? სრული რაოდენობიდან სავარაუდოდ რამდენი გულშემატკივარი მოვა აღნიშნული მაისურით?

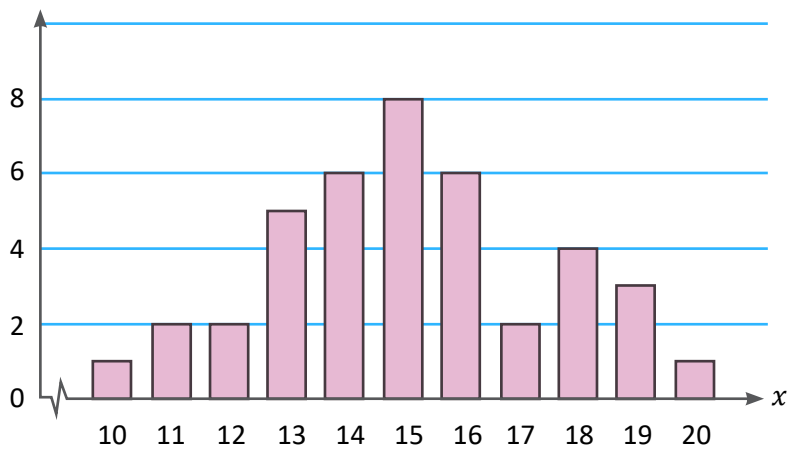


6. რა არის ცხრილით მოცემული მონაცემების მოდა?

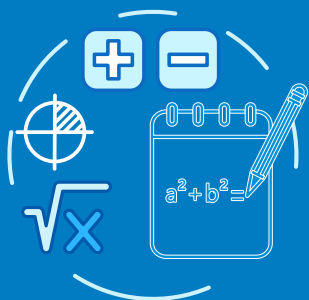
7. აღნიშნული ინფორმაციის მიხედვით დაადგინეთ, საერთო გამოკითხულიდან რამდენს მოსწონს კინო? ინფორმაცია ჩაწერეთ ფარდობითი სიხშირის და პროცენტის მეშვეობით.



8. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ მონაცემების მოდა და დაახასიათეთ განაწილება.



II. დავალების წარდგენა



კომპლექსური დავალება



საკვანძო კითხვა:

- როგორ არის დამოკიდებული ნიადაგის ეროზია ნალექების რაოდენობაზე?



თქვენი დავალება

დააორგანიზეთ კვლევა და შეისწავლეთ არის თუ არა კავშირი (კორელაცია) ნალექების პირობებში დროსა და ნიადაგის ეროზიას შორის. გაეცანით ნიადაგის ეროზიასთან დაკავშირებულ ინფორმაციას

ნიადაგის ეროზია



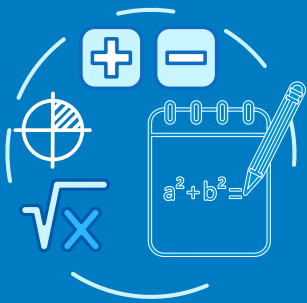
კვლევის დასაორგანიზებლად მოიქეცით შემდეგნაირად:

- აიღეთ სილა (ან მიწა) და მოზილეთ მისგან მყარი მასა, რომელსაც ექნება კლდის ან მომცრო მთის ფორმა;
 - გაზომეთ თქვენ მიერ მოზეულილი მასის სიმაღლე, შემდეგ დროის თანაბარ ინტერვალებში დაასხით თანაბარი რაოდენობის წყალი და შეასრულეთ გაზომვები;
- მაგალითად, გაზომეთ თქვენ მიერ მოზეულილი მასის სიმაღლე, შემდეგ დაასხით წყალი და 20 წამში (ან 30 წამში, ან 10 წამში) გაზომეთ სიმაღლე, შემდეგ ისევ დაასხით წყალი და 20 წამში გაზომეთ სიმაღლე, გაიმეორეთ პროცედურა მანამ, სანამ სრულიად არ დაიშლება მასა. ყოველი წყლის დასხმის შემდეგ, მეორე წყლის დასხმამდე შეგროვებული მონაცემები ჩამოწერეთ ცხრილში; ყურადღება მიაქციეთ, რომ აიღოთ დროის ერთი და იგივე ინტერვალები; დაითვალეთ რა დროში დაიშლება სრულად მოცემული მასა;

დრო	სიმაღლე
საწყისი დრო	საწყისი სიმაღლე
20 წმ	
40 წმ	
60 წმ	
80 წმ	
და ა.შ.	



II. დავალების წარდგენა



კოვალენტური დავალება



შენი დავალება

3. გადაიტანეთ მონაცემები საკოორდინატო სისტემაში და დაფიქრდით, რისი თემა შეგიძლიათ?

კვლევის შედეგები წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, რომელსაც თან დაურთავთ ექსპერიმენტის ფოტო-მასალას და დაორგანიზებულ მონაცემებს;

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რატომ არის მნიშვნელოვანი კვლევის დაგეგმვა და მონაცემების შეგროვება?
- რა დაადგინეთ, არის თუ არა კავშირი დროში ნალექების რაოდენობასა და ნიადაგის ეროზიას შორის? დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი.
- რეალური მოვლენის კვლევისას, შეიძლება თუ არა მეცნიერებმა გამოთქვან ვარაუდი, რა დროში და რა პირობებში შეიძლება მოხდეს მთის (ან კლდის) ჩამოშლა?
- თქვენი აზრით, კიდევ რა მოვლენებს აქვს გავლენა ნიადაგის ეროზიაზე? როგორ გააუმჯობესებდით ექსპერიმენტს?

თემა 2. მოდელირება ფუნქციით

2.1. კორელაცია, მისადაგების წრფე

ჩვენ უკვე გავეცანით ცენტრალური ტენდენციის საზომ ერთეულებს: მონაცემების საშუალო არითმეტიკულს, მედიანას, მოდას; აღნიშნული საზომი ერთეულები ახასიათებს ერთი ცვლადით წარმოდგენის მონაცემებს.

განვიხილოთ ორი ცვლადი სიდიდე, რომლებიც შეიძლება დაკავშირებული იყოს ერთმანეთთან; ჩვენ უკვე განვიხილეთ და ვიცით ცვლად სიდიდეებს შორის ფუნქციური კავშირი. როდესაც ვცდილობთ დაკავშირებას ერთმანეთთან ორი სიდიდე, ვიცით რომ, ერთი შეიძლება იყოს დამოუკიდებელი ცვლადი, მეორე დამოკიდებული.

როდესაც ორი სიდიდეს შორის არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი დამოკიდებულება, ან ორი სიდიდე დაკავშირებულია ერთმანეთთან, აღნიშნული დამოკიდებულება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რამდენიმე სახით: სიტყვიერად, ცხრილის სახით, ანალიზურად (ფორმულა) ან გრაფიკის მეშვეობით.

სტატისტიკური კვლევების შედეგად, ხშირად ფიქსირდება ცვლადებს შორის, სხვადასხვა მონაცემთა ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის კავშირი; აღნიშნული კავშირი ფუნქციური კავშირისგან იმით განსხვავდება, რომ შეიძლება დამოკიდებული იყოს შემთხვევით ფაქტორებზეც, (საკონტროლო ცვლადზე/პარამეტრზე, რომლის კვლევაც ძალიან საინტერესოა). როდესაც სტატისტიკაში იკვლევთ ორ ცვლადს შორის კავშირს, აღნიშნულ კვლევებს უწოდებენ **კორელაციურ** კვლევებს.

კორელაცია (ლათინურად – correlation) – სიტყვანიშნავს გარკვეულ ობიექტებს შორის კავშირს, დამოკიდებულებას; სტატისტიკაში ორ ან მეტ ცვლადს შორის კავშირს, როდესაც ერთი ცვლადის მნიშვნელობის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის მნიშვნელობის სისტემატური ზრდა ან კლება; სტატისტიკაში, როდესაც ვიკვლევთ ორ ცვლადს შორის კავშირს, აუცილებლად უნდა დავსვათ შემდეგი კითხვები: ➡



სტატისტიკაში როდესაც ორ ცვლადს შორის კავშირს ვიკვლევთ, აუცილებლად უნდა დავსვათ შემდეგი კითხვები:

1. არსებობს თუ არა კავშირი ორ ცვლადს (მონაცემთა ორ სიმრავლეს) შორის?
2. რა მიმართულება აქვს ამ კავშირს? (ზრდადია თუ კლებადი?)
3. რამდენად ძლიერია ეს კავშირი?

საკვლევი კითხვა

არის თუ არა კავშირი ადამიანის სიმაღლესა და მის ფეხის ზომას შორის?

განვიხილოთ ორი ცვლადი:

- სიმაღლე და ფეხის ზომა;
- გამოკითხვით შევადგროვოთ მონაცემები, რომლებიც განეკუთვნებიან რაოდენობრივი მონაცემების ტიპს;
- 10 ადამიანს ვკითხოთ სიმაღლე და ფეხის ზომა და დავადგინოთ, ადამიანის ფეხის ზომა როგორ არის დამოკიდებული სიმაღლეზე.

წარმოადგინოთ ცხრილით

სიმაღლე (სმ)	ფეხის ზომა
160	36
162	37
165	39
168	38
170	39
172	41
174	39.5
176	40
178	41
180	42

სტატისტიკაში შეგროვებულ ინფორმაციას ეწოდება – **მონაცემები**. თავის დასაწყისში წარმოდგენილ კითხვარს თუ დავაკვირდებით მივხვდებით, რომ მონაცემები არის სხვადასხვა სახის: **რაოდენობრივი** და **თვისებრივი**.

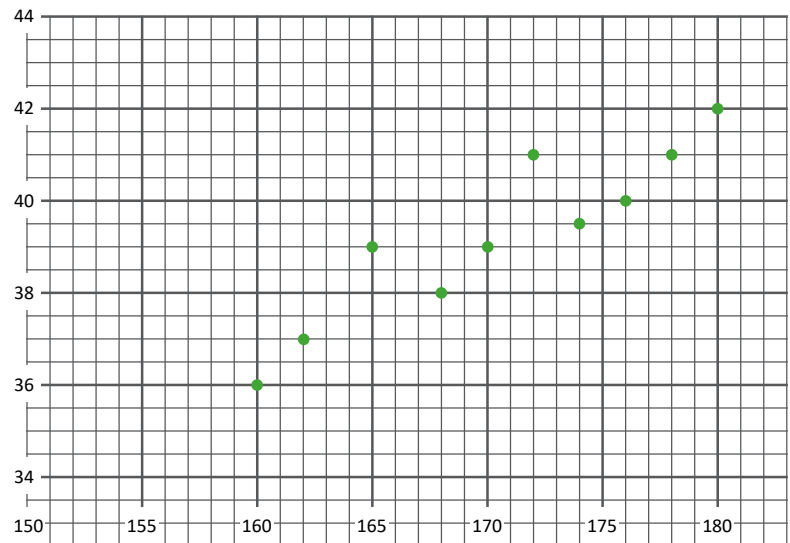
თავის მხრივ ხდება რაოდენობრივი და თვისებრივი მონაცემების კლასიფიკაცია.

ოx ღერძზე გადავზომოთ სიმაღლე, ხოლო Oy ღერძზე კი ფეხის ზომა.

დავინახავთ, რომ წერტილთა სიმრავლე არ არის განლაგებული წრფეზე, თუმცა თვალის ზომით თუ გავავლებთ წრფეს, მონაცემები იქნებიან წრფესთან ახლოს.

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ დავწეროთ წრფის განტოლება; ავარჩიოთ ორი წერტილი, ვთქვათ (170; 39), (176,40) რომელზეც გავავლებთ წრფეს; დავწეროთ წრფის განტოლება;

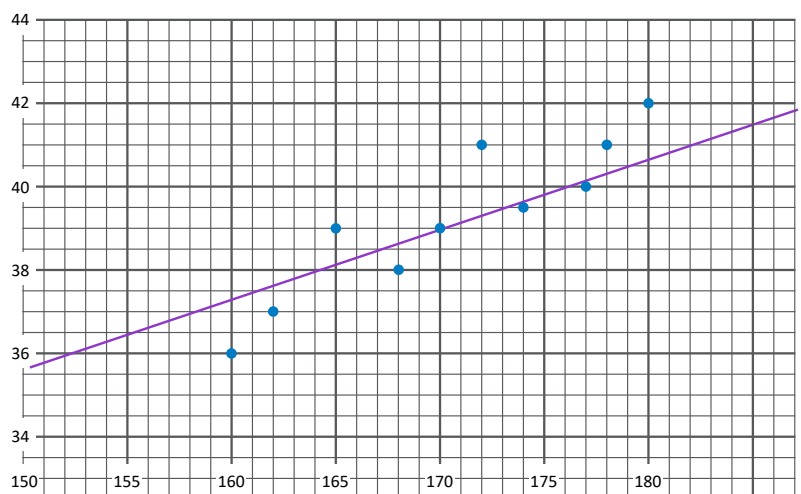
ვიცით, რომ $y = kx + b$



მონაცემების წარმოდგენის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რაც უფრო მაღალია ადამიანი, ფეხის ზომაც შედარებით დიდი ექნება. შეიძლება დავასკვნათ, რომ სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის არსებობს კავშირი, დამოკიდებულება, რომელსაც სტატისტიკაში ვუწოდებთ **კორელაციას**.

თვალის ზომით აგებული საუკეთესო მისადაგების წრფე

ავარჩიოთ სიბრტყეზე ორი წერტილი, რომელზეც გავლებული წრფეც მეტად ახლოს იქნება სხვა დანარჩენ მონაცემთან.



ვიტყვი, რომ სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის არსებობს წრფივი კორელაცია.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40 - 39}{176 - 170} = \frac{1}{6}$$

$y = \frac{1}{6}x + b$, ჩავსვათ $(170; 39)$ წერტილის კოორდინატები განტოლებაში და ვიპოვოთ b ;

$$\frac{1}{6} \cdot 170 + b = 39$$

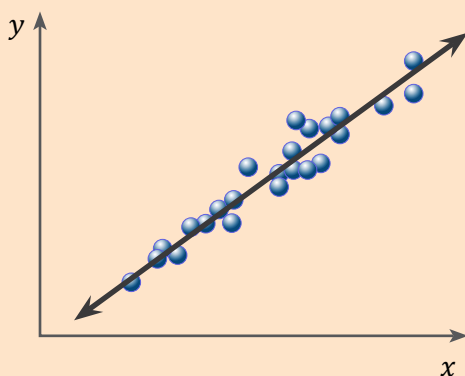
$$b = 39 - \frac{170}{6}$$

$$b \approx 39 - 28.3 = 10.7$$

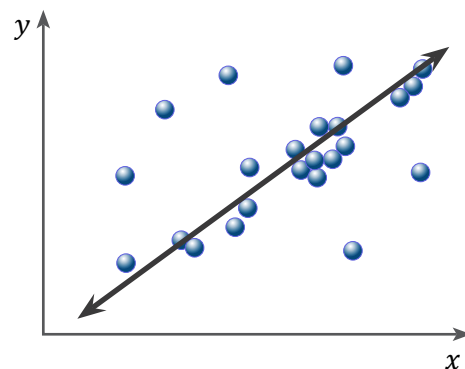
$$y = \frac{1}{6}x + 10.7$$

როდესაც მონაცემები განლაგებულია რაიმე წრფესთან ახლოს, მაშინ ამ მონაცემებს ვაფასებთ აღნიშნული წრფით. გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ არის განლაგებული მონაცემები წრფის მიმართ, ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ რამდენად ძლიერია კავშირი ცვლადებს შორის

როდესაც წერტილები არის მჭიდროდ ახლოს წრფესთან, ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის ზრდა, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის **ძლიერი დადებითი წრფივი კორელაცია**ა.



როდესაც წერტილების ნაწილი წრფესთან ახლოს არის, ნაწილი კი გაბნეულია, თუმცა ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის ზრდა, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის არის **სუსტი (ან ზომიერი) დადებითი წრფივი კორელაცია**.

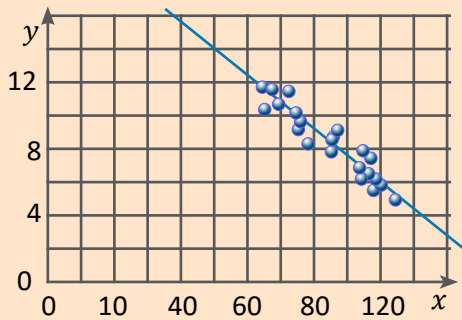


შედეგად: შემდეგ გავკეთოთ გავცნობით კოეფიციენტს, რომელიც დაგვხმარება დავადგინოთ რამდენად ძლიერია კავშირი (ძლიერია, სუსტია თუ ზომიერია).

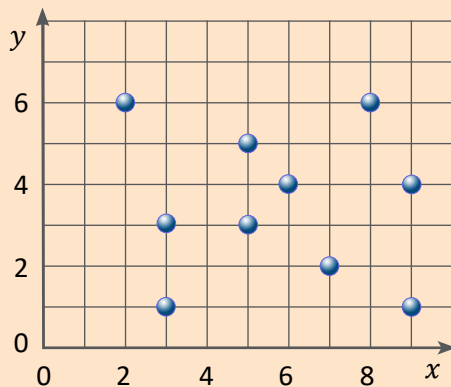
როდესაც წერტილები არის მჭიდროდ ახლოს წრფესთან, ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის კლება, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის არის **ძლიერი უარყოფითი წრფივი კორელაცია**.

როდესაც წერტილების ნაწილი წრფესთან ახლოს არის, ნაწილი კი გაბნეულია, თუმცა ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის კლება, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის არის **სუსტი (ან ზომიერი) უარყოფითი წრფივი კორელაცია**.





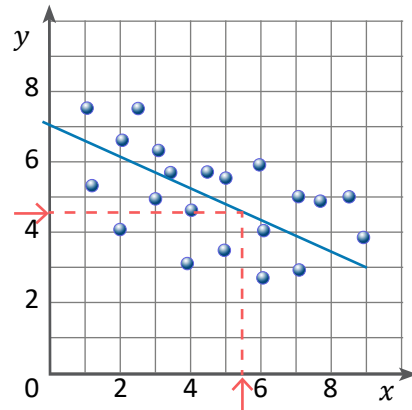
აღნიშნულ შემთხვევაში ცვლადებს შორის **არ არსებობს კორელაცია**, რადგან წერტილები გაბნეულია საკოორდინატო სიბრტყეზე;



პანდემიის პერიოდში, დამკვიდრდა და ხშირად ტელევიზიებით გვესმოდა სიტყვა **კლასტერი**.

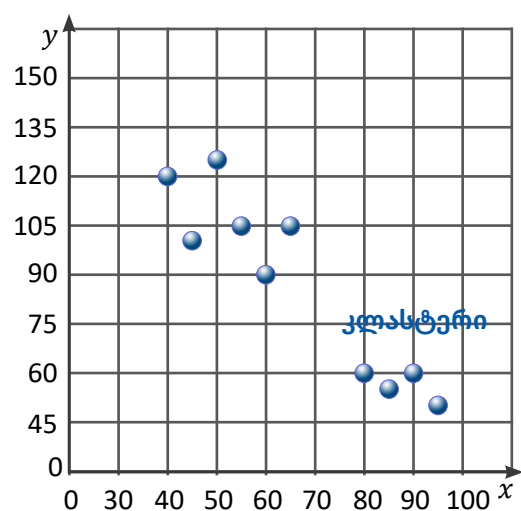
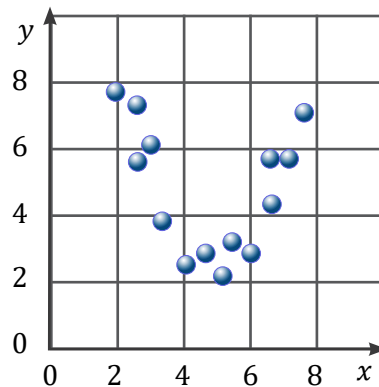
- რა არის კლასტერი? „კლასტერი“ წარმოდგება ლათინური სიტყვისგან. ინგლისურად „cluster“, რაც ნიშნავს: „თავმოყრა, დაგროვება“, „კონა“.

როდესაც დიაგრამაზე მონაცემების ნაწილი არის დაჯგუფებული, ვამბობთ, რომ მოცემულია კლასტერი.



არაწრფივი კორელაცია

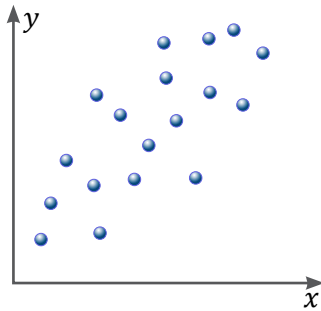
მონაცემების სიბრტყეზე გადატანის შემდეგ, მათი აღწერა სხვადასხვა გრაფიკითაა შესაძლებელი; აღნიშნულ შემთხვევაში მონაცემებს შორის არის არის წრფივი კორელაცია (არის კვადრატული დამოკიდებულება), რადგან გრაფიკს აქვს პარაბოლას ფორმა;



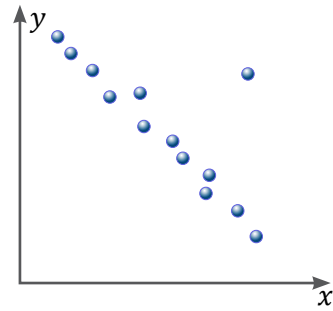
სავარჯიშოები

1. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, დაახასიათეთ ცვლადებს შორის კორელაცია: დადებითია თუ უარყოფითი? ძლიერი თუ სუსტი? რომელ დიაგრამაზეა ამოვარდნილი მონაცემი? პასუხი დაასაბუთეთ.

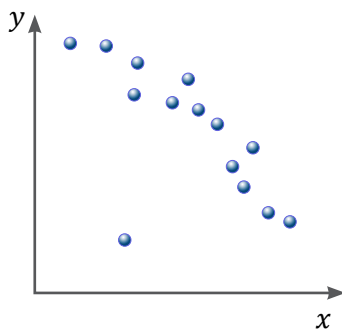
ა)



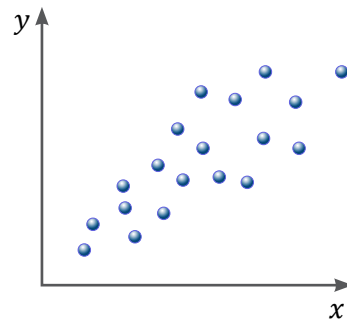
ბ)



გ)



დ)

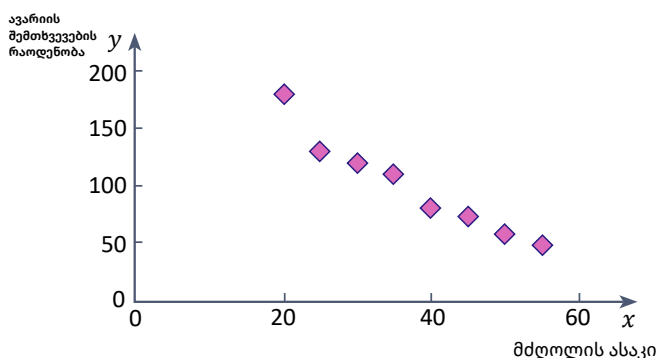


2. ცხრილით მოცემულია ქულები, რომელიც მოსწავლეებმა მათემატიკასა და ფიზიკაში მიიღეს.

მათემატიკა	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10
ფიზიკა	3	4	4	5	4	6	7	7	8	9

- გადაიტანეთ მონაცემები საკოორდინატო სისტემაში.
- დაადგინეთ, არის თუ არა მათემატიკისა და ფიზიკის ქულებს შორის კორელაცია, თუ არის, როგორი?

3. მოცემული ცხრილი ასახავს ავარიულ შემთხვევებსა და მძღოლის ასაკს შორის კავშირს.



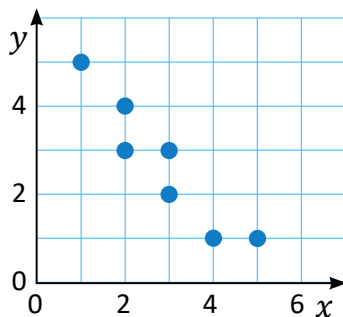
- დაადგინეთ, ავარიების რამდენი პროცენტი მოდის თითოეულ ასაკობრივ ჯგუფზე;
- დაადგინეთ, არის თუ არა ავარიის შემთხვევების რაოდენობასა და მძღოლის ასაკს შორის კორელაცია, თუ არის, როგორი?
- იპოვეთ რომელიმე მისადაგების წრფე.

სავარჯიშოები

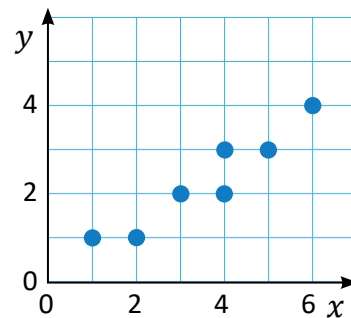
4. ქვემოთ წარმოდგენილი გრაფიკიდან გამომდინარე, აღწერეთ რა ტიპის კორელაციაა ცვლადებს შორის?

- გადაიტანეთ გრაფიკი რვეულში, თვალის ზომით გაავლეთ მისადაგების წრფე და დაწერეთ წრფის განტოლება;
- წრფის განტოლების დაწერის შედეგ, დაწერეთ როგორ და რის საფუძველზე შეიძლება შემდეგი წერტილის ადგილის პროგნოზირება?

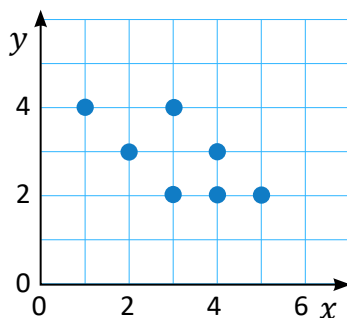
ა)



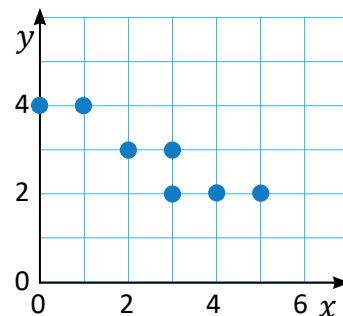
ბ)



გ)



დ)

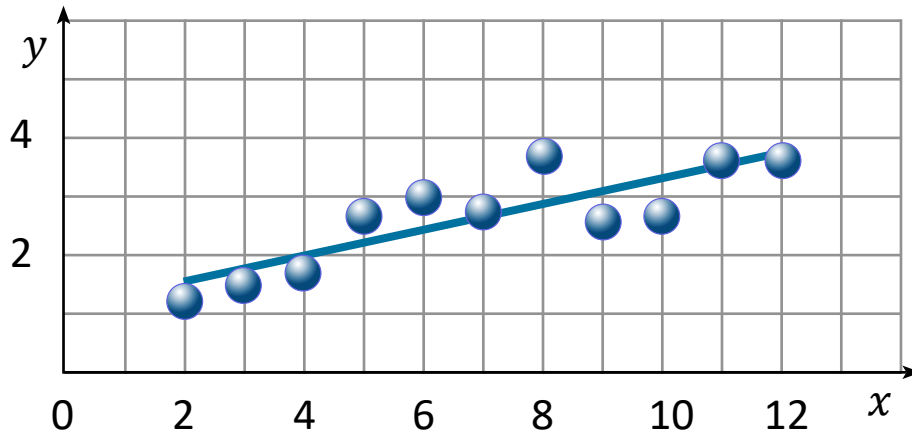


5. ცხრილში მოცემულია კინოთეატრში გაყიდული ბილეთების რაოდენობა და ტემპერატურა. შეადგინეთ მოცემული მონაცემებით წერტილოვანი დიაგრამა. დაადგინეთ არის თუ არა კავშირი ტემპერატურასა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის. (ტემპერატურა მოცემულია ფარენჰეიტებით).

ტემპერატურა (F°)	გაყიდული ბილეთები
40	120
45	100
50	125
55	105
60	90
65	105
80	60
85	55
90	60
95	50

სავარჯიშოები

6. დიაგრამაზე x წარმოადგენს წლებს, დაწყებული 2000 წლიდან 2012 წლამდე, ხოლო y წარმოადგენს გაზის ფასს ლარებში.



- გამოთვალეთ რა განსხვავებაა 2012 და 2002 წლების გაზის ფასებს შორის? პასუხი დაამრგვალეთ მეასედამდე სიზუსტით;
- თუ ფასის მატება გაგრძელდა აღნიშნული წესით, გამოთქვით ვარაუდი, რა შეიძლება იყოს გაზის ფასი 2025 წელს? 2030 წელს?

2.2. ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილი

ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილი გვაძლევს შესაძლებლობას წარმოვადგინოთ შესაბამისობები ორ თვისებრივ მონაცემს შორის.



ნიმუში 1

ცხრილით მოცემულია კვლევის შედეგები, რომელიც ეხებოდა გოგოებისა და ბიჭების საყვარელ სასმელს.

ცხრილით დაორგანიზებულია თვისებრივი მონაცემები;

კვლევის შედეგად სურდათ დაედგინათ, რომელი უფრო მოსწონდათ გოგოებს და ბიჭებს: რძე, წყალი თუ ნატურალური წვენი. მკვლევარს სურდა, ასევე, შედარებითი ანალიზის გაკეთება.

		სასმლის სახეობა			სულ
		რძე	წყალი	ნატურალური წვენი	
სქესი	გოგოები	24	36	40	100
	ბიჭები	20	30	50	100
	სულ	44	36	90	200

ცხრილი N1.

ცხრილი 1-ის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ ფარდობითი სიხშირის ცხრილი (მონაცემის შეფარდებით საერთო რაოდენობასთან); ასევე წარმოვადგინოთ მონაცემები პროცენტის სახით.

		სასმლის სახეობა			სულ
		რძე	წყალი	ნატურალური წვენი	
სქესი	გოგოები	12%	18%	20%	50%
	ბიჭები	10%	15%	25%	50%
	სულ	22%	33%	45%	100%

ცხრილი N2.

სავარჯიშოები

1. ცხოველთა მოყვარულ ჯგუფში ყოველ ადამიანს ჰყავს ძაღლი, კატა ან ჩიტი. ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილი გვიჩვენებს რამდენ ადამიანს ყავს თითოეული სახეობა. ამ ცხრილის საფუძველზე შეადგინეთ ფარდობითი სიხშირის ცხრილი, ასევე, წარმოადგინეთ ინფორმაცია პროცენტის სახით; დაამრგვალეთ პროცენტი მათედამდე სიზუსტით.

		სახეობა			სულ
		კატა	ძაღლი	ჩიტი	
სქესი	მდედრობითი	50	20	10	
	მამრობითი	45	15	10	
სულ					

2. ჩაატარეთ გამოკითხვა, რისი ყურება ურჩევნიათ თქვენს თანატოლებს: ფილმების, სერიალების თუ ანიმაციების. დააორგანიზეთ მონაცემები ცხრილში და წარმოადგინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია (წარმოადგინეთ ცხრილი, რომელშიც მოცემული იქნება პროცენტული განაწილება).

		სახეობა			სულ
		კატა	ძაღლი	ჩიტი	
სქესი	მდედრობითი	40	20	15	
	მამრობითი	80	20	25	
სულ					

3. ჩაატარეთ გამოკითხვა, რომელი სოციალური ქსელი მოსწონთ მეტად თქვენს თანატოლებს. შეარჩიეთ 3 სოციალური ქსელი, შეაგროვეთ მონაცემები, დააორგანიზეთ ცხრილში და წარმოადგინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია.

		სოციალური ქსელი			სულ
სქესი	გოგონები				
	ბიჭები				
სულ					

 **გამოწვევა:** შეგიძლიათ მონაცემები წარმოადგინოთ, ასევე, სვეტებიანი დიაგრამის სახით და შეადაროთ გრაფიკულად.

4. სტუდენტებმა კოლეჯში ჩაატარეს გამოკითხვა კვირაში რამდენ საათს ხარჯავენ საშინაო დავალებზე? ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილით მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.



სავარჯიშოები

		საათები					
		< 1-ზე	1-2 საათი	3-4 საათი	5-6 საათი	6-ზე მეტი	სულ
კლასი	VI	18	53	45	20	6	142
	VII	21	48	42	27	12	150
	VIII	17	46	65	57	15	200
	სულ	56	147	152	104	33	492

გაანალიზეთ გამოკითხვის შედეგები; სიხშირის ცხრილის საფუძველზე შექმნით ცხრილი, რომელშიც ინფორმაცია იქნება წარმოდგენილი პროცენტებით და უპასუხეთ კითხვებს:

- სულ რამდენი მოსწავლე გამოიკითხა? რამდენი მე-8 კლასელი?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მე-7 კლასელები?
- საერთო რაოდენობის რა პროცენტი უთმობს დავალებების შესრულებას 5-6 საათს? აღნიშნული მონაცემიდან, რა პროცენტს შეადგენენ მე-8 კლასელები?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 3-4 საათს და არიან მე-6 კლასში?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 1-2 საათს და არიან მე-6 და მე-7 კლასებში?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 6 საათზე მეტს და არიან მე-8 კლასში?
- ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი წინადადება: „იმ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებიც საშინაო დავალებაზე ხარჯავენ 5-6 საათს, უფრო მეტია, ვიდრე მოსწავლეებისა, რომლებიც 1-2 საათს უთმობენ საშინაო დავალების მომზადებას“.

5. სტუდენტებმა კოლეჯში ჩაატარეს გამოკითხვა, რას ანიჭებდნენ უპირატესობას: თხილამურებით სრიალს, ციგებით სრიალს თუ ფიგურულ სრიალს. ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილით მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.

	თხილამურები	ციგები	ფიგურული სრიალი	სულ
ბიჭები	19	24	9	52
გოგონები	12	15	26	53
სულ	31	39	35	105

გაანალიზეთ გამოკითხვის შედეგები; სიხშირის ცხრილის საფუძველზე შექმნით ცხრილი, რომელშიც ინფორმაცია იქნება წარმოდგენილი პროცენტებით და უპასუხეთ კითხვებს:



სავარჯიშოები

- სულ რამდენი სტუდენტი გამოიკითხა?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ გოგოები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ ფიგურულ სრიალს?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ ბიჭები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ თხილამურებით სრიალს?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ სტუდენტები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ ციგებით სრიალს?
- გამოკითხული მონაცემების საფუძველზე გაარკვიეთ რამდენი პროცენტით მეტ გოგოს მოსწონს ფიგურული სრიალი ვიდრე ციგებით სრიალი?
- დასვით დამატებითი კითხვები და უპასუხეთ.

6. დააორგანიზეთ კვლევა თქვენთვის სიანტერესო თემებზე და წარმოადგინეთ ორგანოზომილებიანი სიხშირის ცხრილის მეშვეობით.

2.3. პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი

 **მათემატიკის
მოყვარულთათვის***

[ტელესკოპი](#)

9:30-დან განიხილება
აღნიშნული საკითხი

როდესაც ორ ცვლად სიდიდეს შორის ვაძგენთ კორელაციას, შესაძლებელია სიტუაციის აღწერა და წარმოდგენა დისკრეტული გრაფიკით; გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ არის წერტილები განლაგებული სიბრტყეზე, შეგვიძლია სიტუაციის შეფასება მიახლოებითი გრაფიკის დახმარებით.

განვიხილოთ მისადაგების წრფე, რომელსაც ვაგებდით პირობითად, მონაცემებიდან აღებული ნებისმიერი ორი წერტილის შერჩევით; სხვადასხვა ადამიანმა, წერტილების განსხვავებული შერჩევის გამო, შესაძლებელია დახაზოს სხვადასხვა გრაფიკი და დაწეროს სხვადასხვა მისადაგების წრფის განტოლება;

იმისათვის, რომ კორელაციის შეფასება არ იყოს დამოკიდებული ადამიანის მიერ მონაცემებიდან შემთხვევით შერჩეულ წერტილებზე, შემოტანილია კორელაციის კოეფიციენტი r , რომლის გამოთვლის შემდეგ უკვე ნებისმიერი დამკვირვებელი ერთნაირად აღწერს კორელაციას სიდიდეებს შორის, რაც მეტად ობიექტურია.

მათემატიკოსმა კარლ პირსონმა შემოიღო კოეფიციენტი r , რომლის მნიშვნელობა მოთავსებულია -1 -სა და 1 -ს შორის $-1 \leq r \leq 1$; კოეფიციენტის მნიშვნელობით და ნიშნით შეიძლება დავადგინოთ, როგორია კორელაცია ცვლადებს შორის.

პირსონის კორელაციის გამოთვლა არის რთული და მას ითვლიან თანამედროვე ელექტრონული  ტექნოლოგიების გამოყენებით.

მითითება:

არ გააიგივოთ პირსონის კორელაცია წრფის დახრილობასთან (კუთხურ კოეფიციენტთან); ის გამოითვლება რთული ფორმულით, რომელიც არ არის პროგრამაში, თუმცა მათემატიკის მოყვარულებმა შეგიძლიათ იხილოთ ქვემოთ.

საკვანძო კითხვა:

როგორ ვიპოვოთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი ტექნოლოგიების გამოყენებით?

[იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია](#)

ნაბიჯი 1:

ქსელის ცხრილში დავაორგანიზოთ ინფორმაცია $(x; y)$ წყვილები

x	y
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

ნაბიჯი 2:

მოვნიშნოთ ცხრილში მოცემული ინფორმაცია, დავიმასხვროთ (ბრძანება Copy-ს მეშვეობით).

ნაბიჯი 4

მას შემდეგ, რაც ცხრილით შეიტანთ ინფორმაციას, მარჯვენა მხარეს გამოჩნდება ცხრილის შესაბამისი გრაფიკი.

ცხრილის შემდეგ ველში აკრიფეთ ბრძანება: $\text{Corr}(x_1; y_1)$ ამის შემდეგ, მესამე ველში გამოჩნდება კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

ჩვენ მიერ განხილულ შემთხვევაში, კორელაციის კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$r \approx 0.67$$

გამომდინარე იქიდან, თუ რას უდრის პირსონის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, შეგვიძლია ცვლადებს შორის კორელაციის შეფასება.

ნაბიჯი 3:

შევიღეთ ვებ-გვერდი

<https://www.desmos.com/calculator>



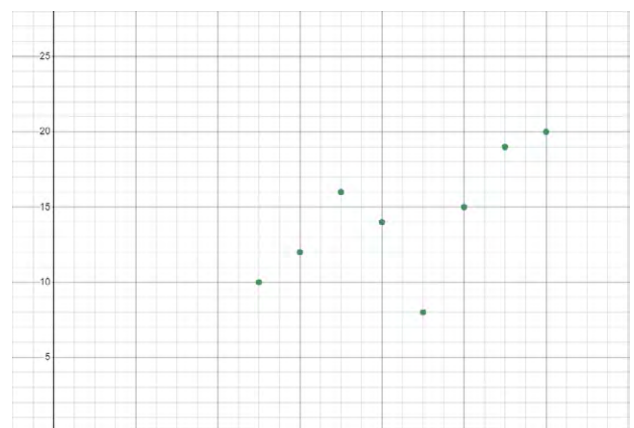
და მარცხენა სვეტში გადაიტანეთ დამახსოვრებული ინფორმაცია ბრძანების (paste-ის მეშვეობით)

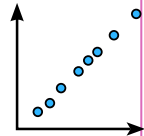
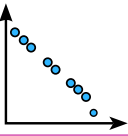
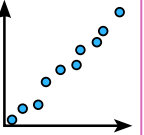
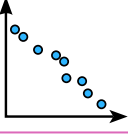
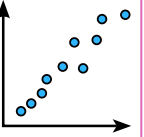
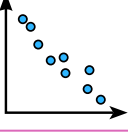
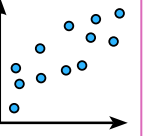
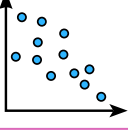
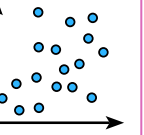
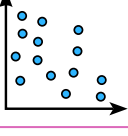
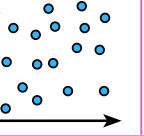
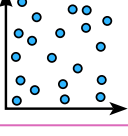
x_1	y_1
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

x_1	y_1
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

$\text{corr}(x_1, y_1)$

= 0.671936840905



დადებითი კორელაცია			უარყოფითი კორელაცია		
$r = 1$	სრულყოფილი დადებითი კორელაცია		$r = -1$	სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია	
$0.95 \leq r < 1$	ძალიან ძლიერი დადებითი კორელაცია		$-1 < r \leq -0.95$	ძალიან ძლიერი უარყოფითი კორელაცია	
$0.87 \leq r < 0.95$	ძლიერი დადებითი კორელაცია		$-0.95 < r \leq -0.87$	ძლიერი უარყოფითი კორელაცია	
$0.7 \leq r < 0.87$	ზომიერად დადებითი კორელაცია		$-0.87 < r \leq -0.7$	ზომიერად უარყოფითი კორელაცია	
$0.5 \leq r < 0.7$	სუსტი დადებითი კორელაცია		$-0.7 < r \leq -0.5$	სუსტი უარყოფითი კორელაცია	
$0 \leq r < 0.5$	ძალიან სუსტი დადებითი კორელაცია		$-0.5 < r < 0$	ძალიან სუსტი უარყოფითი კორელაცია	

წყარო: დიაგრამა აღებულია IB-ის წიგნიდან.

თუ $r = 0$ -ს ვამბობთ, რომ სიდიდეებს შორის კორელაცია არ არსებობს.



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

როგორ ვიპოვოთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი ტექნოლოგიების გამოყენებით?

[იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია](#)

ა)

x	y
1	8
2	8
3	10
4	15
5	13
6	12
7	18
8	16
9	20
10	20

1. ცხრილით მოცემულია ორ ცვლად სიდიდეს შორის კავშირი; ტექნოლოგიების მეშვეობით დაადგინეთ არის თუ არა კორელაცია ცვლადებს შორის, და თუ არის, როგორი?

ბ)

x	y
11	60
13	59
15	50
17	52
19	45
21	48
23	40
25	34
27	30
29	32

2. ცხრილში მოცემულია ტემპერატურა და კინოთეატრში გაყიდული ბილეთების რაოდენობა შესაბამისი დღის მიხედვით.

- მოცემული მონაცემების საფუძველზე შეადგინეთ წერტილოვანი დიაგრამა; დაადგინეთ არის თუ არა კორელაცია ტემპერატურასა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის?
- იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი და იმსჯელეთ მოცემულ სიტუაციაზე.

ტემპერატურა (F°)	გაყიდული ბილეთები
40	120
45	100
50	125
55	105
60	90
65	105
80	60
85	55
90	60
95	50

სავარჯიშოები



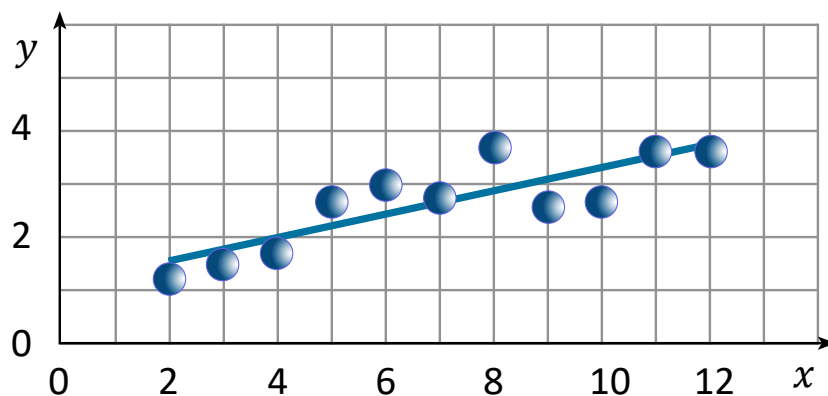
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

მას შემდეგ, რაც დაადგენთ კორელაციის კოეფიციენტს, უპასუხეთ კითხვებს:

- არის თუ არა კავშირი ამინდსა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის?
- რამდენად მნიშვნელოვანია კონცერტის ორგანიზატორებმა ღონისძიების დაგეგმვამდე გაითვალისწინონ ამინდის ფაქტორი?
- თქვენზე რამდენად მოქმედებს ამინდის ფაქტორი?

3. თუ x წარმოადგენს წლებს, დაწყებული 2000 წლიდან 2012 წლამდე და y წარმოადგენს გაზის ფასს:

- გადაიტანთ მონაცემები ცხრილში (მიახლოებით) და ტექნოლოგიების მეშვეობით იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
- თუ ფასის მატება გაგრძელდა აღნიშნული წესით, გამოთქვით ვარაუდი, რა შეიძლება იყოს გაზის ფასი 2025 წელს? 2030 წელს?



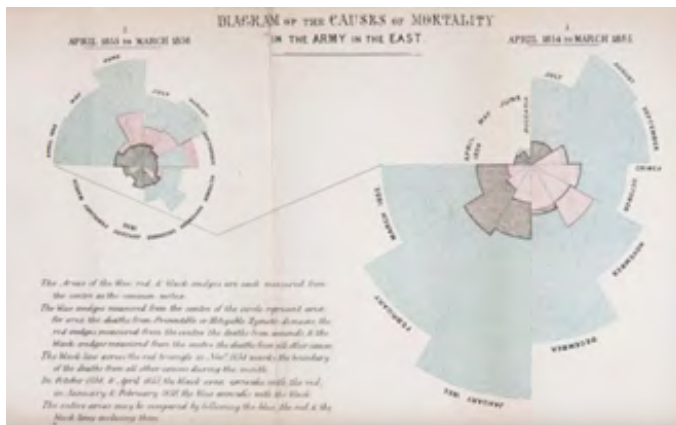
- 4. გამოკითხეთ თქვენს ირგვლივ თანატოლები, ჰკითხეთ სიმაღლე და ფეხის ზომა, დააორგანიზეთ მონაცემები ცხრილში და დაადგინეთ, როგორი კორელაციაა სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის?
- 5. ჩაატარეთ კვლევა, ჰკითხეთ თანატოლებს, რა ქულებს იღებენ მათემატიკასა და ქართულში; დაადგინეთ, არის თუ არა კორელაცია ნიშნებს შორის და გააკეთეთ დასკვნა;
- 6.  **რეკომენდაცია:** თქვენ მიერ დაორგანიზებულ კვლევებში თუ არის შესაძლებელი დადგინდეს კორელაცია ცვლადებს შორის, გამოიყენეთ აღნიშნული ცოდნა.

ეს საინტერესოა!

ფლორენს ნაიტინგეილი (1820-1910) – ინგლისელი სტატისტიკოსი, რომელმაც ჩაუყარა საფუძველი მედიის პროფესიას.

ფლორენს ნაიტინგეილი ერთ-ერთი პირველი იყო, ვინც ეფექტურად იყენებდა ინფოგრაფიკებს, გრაფიკულ პრეზენტაციებსა და სტატისტიკურ მონაცემებს. ასევე, ქმნიდა ახალ დიაგრამებსა და წარმოდგენის ფორმებს.

ქვემოთ მოცემული დიაგრამა შექმნილია ფლორენსის მიერ, მან აღნიშნული დიაგრამით, ომის დროს გარდაცვლილების სხვადასხვა მიზეზი წარმოადგინა.



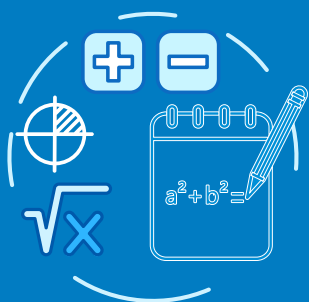
ფლორენს ნაიტინგეილს მოღვაწეობა იყო მრავალმხრივი და საინტერესო.

იხილეთ დამატებითი ინფორმაცია

[ინტერირება ინგლისურთან](#)



III. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

რომ ფეხბურთის ძირითად შემადგენლობაში თამაშობს 11 მოთამაშე, გუნდში კიდევ არიან დამატებითი მოთამაშეები, რომლებმაც შეიძლება შეცვალონ ძირითადი მოთამაშეები. თუ სათადარიგო მოთამაშეებიანად გუნდში არის 16 მოთამაშე, მწვრთნელს შეუძლია სხვადასხვა შემადგენლობა დააკომპლექტოს და ისე ათამაშოს გუნდი.



პოპლექსური დავალება



საკვანძო კითხვა:

თუ გიფიქრიათ რამდენი სხვადასხვა წესით არის შესაძლებელი გუნდების დაკომპლექტება? რაზე შეიძლება იყოს დამოკიდებული გუნდების შედგენის წესი?



თქვენი დავალება

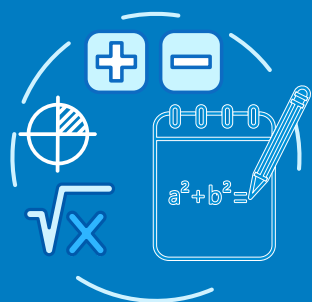
შეისწავლოთ მათემატიკის კურსიდან: გადანაცვლება, ჯუფთება და წყობა. წარმოიდგინოთ, რომ ხართ რომელიმე სპორტული გუნდის მწვრთნელი და გყავთ დასაკომპლექტებელი გუნდი. დაითვალოთ ვარიანტები:

1. თუ სათადარიგო მოთამაშეებთან ერთად გუნდში გყავთ 16 მოთამაშე, ხოლო მოედანზე სათამაშოდ უნდა შევიდეს 11 მოთამაშე, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს იმისათვის, რომ დააკომპლექტოთ გუნდი?
2. თუ სათადარიგო მოთამაშეებთან ერთად გუნდში გყავთ 16 მოთამაშე, აღნიშნული 16-დან 6 ყოველთვის არის ძირითად შემადგენლობაში და დასამატებელი გყავთ 5 მოთამაშე, რამდენი ვარიანტი არსებობს, რომ შეარჩიოთ 5 მოთამაშე?
3. თუ დავუშვებთ, რომ 11 კაციანი შემადგენლობიდან ყველა ერთნაირი წარმატებით თამაშობს ყველა პოზიციაზე, რამდენი სხვადასხვა ვერსია არსებობს მათი გადანაცვლების და გუნდის დაკომპლექტების?
4. თუ გუნდში 6 ადამიანიდან 2 უნდა იყოს თავდამსხმელი, რამდენი სხვადასხვა 2-ის ამორჩევაა შესაძლებელი?
5. რატომ არის მნიშვნელოვანი მწვრთნელისთვის ვარიანტების დათვლა?
6. შექმენით მსგავსი დავალება თქვენთვის საინტერესო თემაზე, სადაც საჭირო იქნება ვარიანტების დათვლა.

გაგრძელება



III. დავალების წარდგენა



კომპლექსური დავალება

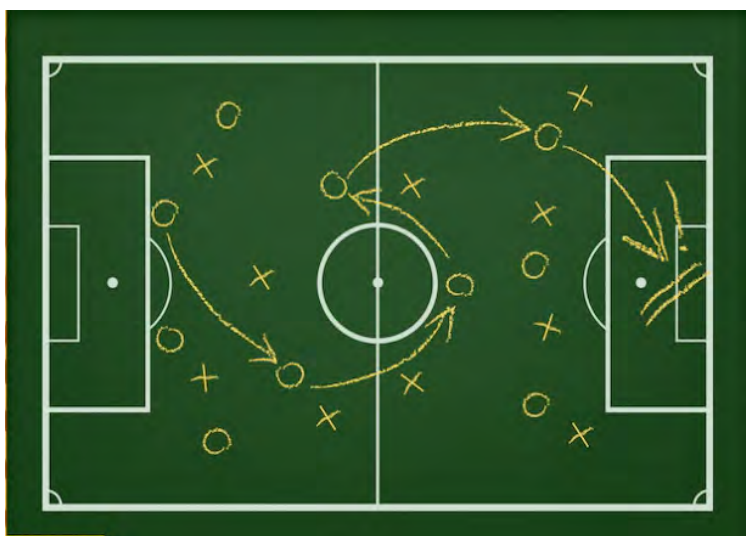


თქვენი დავალება

დავალება წარმოადგინეთ რეფერატის სახით

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

1. როგორ გვეხმარება კომბინატორიკა, ვარიანტების დათვლა, გადაწყვეტილების მიღებაში?
2. რა ძირითადი განსხვავებაა წყობასა და ჯუფდებას შორის? მოიყვანეთ მაგალითები.
3. დავალებაში მოცემული N2, 3 და 4 კითხვებზე პასუხის გასაცემად რომელი მათემატიკური მოდელები გამოიყენეთ?
4. იმსჯელეთ მიღებული ცოდნის მნიშვნელობაზე ყოველდღიურ ცხოვრებაში.
5. მოიფიქრეთ რაიმე ანალოგიური ამოცანა, სადაც შეიძლება გამოიყენოთ მიღებული ცოდნა.



თემა 3. კომბინატორიკა

3.1. ვარიანტების დათვლა, ვარიანტების დათვლის გამრავლების წესი

კომბინატორიკა – კომბინატორიკა მათემატიკის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციების შედგენისა და მათი რაოდენობის დადგენის წესებს. მათემატიკის ეს დარგი ფართოდ გამოიყენება ალბათობის თეორიაში, მათემატიკურ ლოგიკასა და სხვა მეცნიერებებში.

- როგორ არის შესაძლებელი რაიმე ყოფით სიტუაციაში შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის დათვლა?



ნიმუში 1

სიტუაცია 1:

დავუშვათ, თაროზე არის ორი წიგნი: **წიგნი N1** და **წიგნი N2** და სტუდენტმა თანმიმდევრობით უნდა აირჩიოს ორი წიგნი;

რა არჩევანი აქვს სტუდენტს?

ჯერ წიგნი N1 და შემდეგ წიგნი N2,

ან

ჯერ წიგნი N2 და შემდეგ წიგნი N1.

ანუ არის არჩევანის მხოლოდ ერთი ვარიანტი

სიტუაცია 2:

თაროზე არის 5 წიგნი და სტუდენტს აქვს შესაძლებლობა აირჩიოს ნებისმიერი 2 წიგნი თაროდან, რამდენი ვარიანტი არსებობს მისი არჩევანის გაკეთების?

მარჯვნივ მოცემულია დიაგრამა, რომელიც გვიაღვწევს ვარიანტების დათვლას:

მას შეუძლია აირჩიოს ჯერ N1 და შემდეგ N2, ან პირიქით, ამიტომ ეს ორი ვარიანტი ითვლება 1 არჩევანად, იმიტომ, რომ ამ შემთხვევაში არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას;

დავითვალოთ ვარიანტები და მივიღებთ, რომ სულ 10 სხვადასხვა ვარიანტია, რომლის მიხედვითაც სტუდენტმა შეიძლება აირჩიოს ორი წიგნი.

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	



ნიშნობა 2

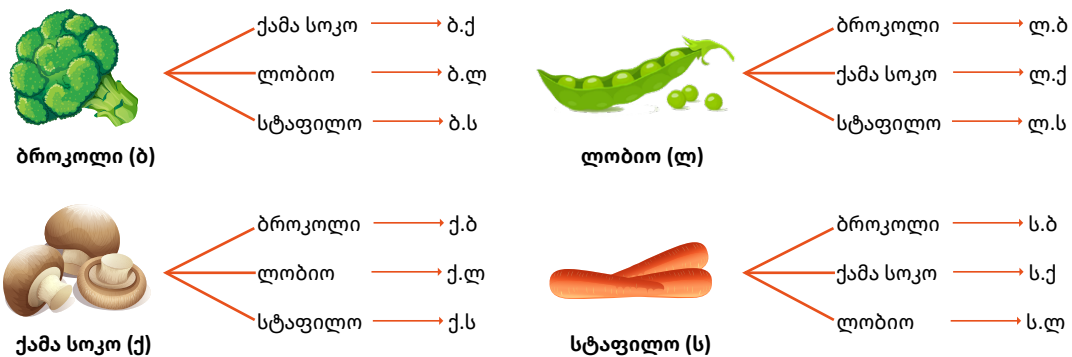
მაღაზიაში 4 სახეობის ბოსტნეულია: ბროკოლი, ქამა სოკო, ლობიო და სტაფილო; მყიდველს სურს იყიდოს მხოლოდ 2 სახეობა; რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთება შეუძლია?

სიტუაციის გააზრება:

იმისათვის, რომ დავითვალოთ ვარიანტები, სასურველია სიტუაციის ვიზუალიზაცია გარკვეული დიაგრამით; ქვემოთ გამოყენებულ დიაგრამას, ხისებრი დიაგრამა ეწოდება.

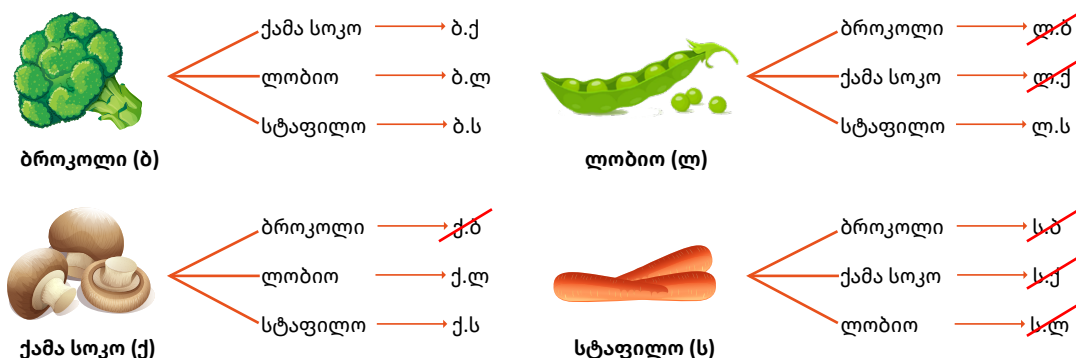
შემოვიტანოთ აღნიშვნები და განვიხილოთ ვარიანტები:

მაგალითად, თუ პირველი არჩევანია ბროკოლი, მეორე შეიძლება იყოს ქამა სოკო, ლობიო ან სტაფილო და ა.შ.



სულ არსებობს 12 ვარიანტი.

მაგრამ თუ დავაკვირდებით დიაგრამას დავინახავთ, რომ გარკვეული წყვილი მეორდება; გამომდინარე იქიდან, რომ არჩევანის გაკეთების დროს არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას, გადავხაზოთ ის წყვილები, რომლებიც მეორდებიან და განვაახლოთ დიაგრამა.



მივიღეთ 6 სხვადასხვა წყვილი; ე.ი. მაღაზიაში მყიდველს შეუძლია გააკეთოს 6 სხვადასხვა არჩევანი.

გამრავლების წესი:



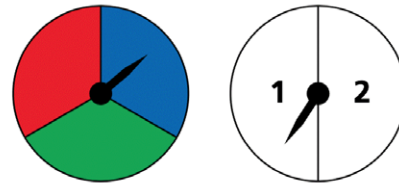
ნიმუში 3

განვიხილოთ ორი ბზრიალა A და B (ე.წ. ორი სპინერი);

A-ს აქვს 3 დანაყოფი, რომლის ფერებია: წითელი, მწვანე და ლურჯი;

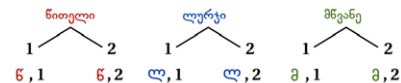
B-ს აქვს 2 დანაყოფი, რომელსაც აწერია რიცხვები 1 და 2;

დავუშვათ, ორივე ბზრიალას ვატრიალებთ, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მივიღოთ ორივეს გაჩერებისას?



სპინერი A

სპინერი B



დიაგრამიდან ცხადად ჩანს, რომ შესაძლებელია 6 სხვადასხვა ვარიანტის განხორციელება.



ნიმუში 4

განვიხილოთ მათემატიკური ამოცანა: გვაქვს ხუთი ციფრი 2;3;5;7;8. საჭიროა, ამ ციფრებით შევადგინოთ სამნიშნა რიცხვები, ისე, რომ ციფრები არ განმეორდეს. რამდენი ასეთი რიცხვის შედგენა შეიძლება ამ ციფრებით?

ცხადია, სამნიშნა რიცხვისთვის გვჭირდება სამი ციფრი, რომლებიც უნდა ჩავწეროთ ასეულების, ათეულების და ერთეულების შესაბამის სათანრიგო პოზიციებზე.



ასეულები



ათეულები



ერთეულები

ასეულების თანრიგში შეიძლება ჩაიწეროს მოცემული ხუთი ციფრიდან ნებისმიერი ერთი, ე.ი. გვაქვს ამორჩევის ხუთი ვარიანტი. ათეულების თანრიგში, რადგან ციფრების გამეორება არ შეიძლება, შეიძლება ჩაისვას უკვე ოთხი დარჩენილი ციფრიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს ჩასმის ოთხი ვარიანტი. საბოლოოდ, ერთეულების თანრიგში შეიძლება ჩავწეროთ დარჩენილი სამი ციფრიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს სამი ვარიანტი.

საბოლოოდ, გამრავლების წესის გამოყენებით, საძიებელი სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება: $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ 60 სამნიშნა რიცხვი: 235; 237; 238; 253; 257 და ა.შ.

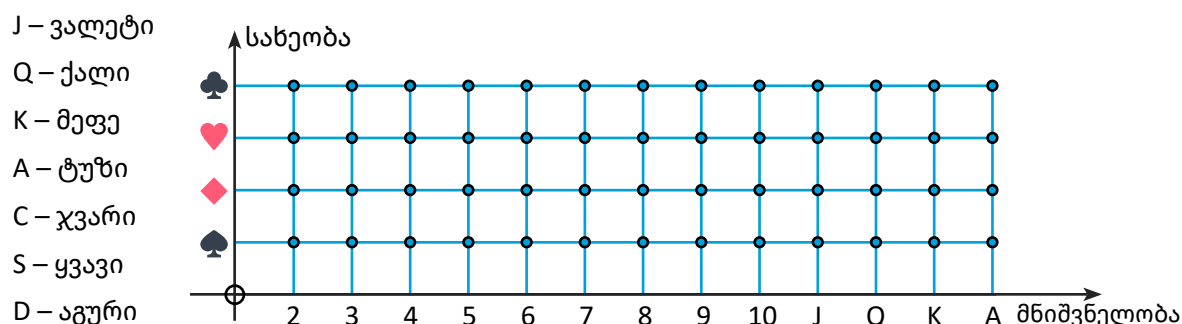
საზოგადოდ, თუ რაიმე ობიექტი შეიძლება შეირჩეს m სხვადასხვა გზით, ხოლო ყოველი ასეთი შერჩევის შემდეგ შეიძლება შეირჩეს მეორე ობიექტი k სხვადასხვა გზით, მაშინ პირველი და მეორე ობიექტების თანმიმდევრობით შერჩევათა რაოდენობა n იქნება.

$n = m \cdot k$. ამ წესს უწოდებენ გამრავლების წესს.

სავარჯიშოები

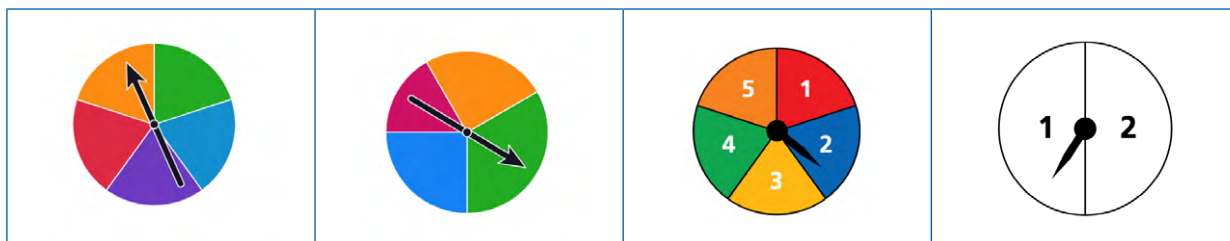
1. მაღაზიაში არის 5 სახეობის ხილი: ვაშლი, მსხალი, ბანანი, ატამი, ქლიავი; მომხმარებელს სურს ნებისმიერი ორის არჩევა:
 - გააკეთეთ დიაგრამა, რომელზეც ნაჩვენებია იქნება, თუ მომხმარებელს სურს აირჩიოს ნებისმიერი ორი სახეობა. რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთებაა შესაძლებელი?
 - თუ ერთ-ერთი ხილი აუცილებლად უნდა იყოს ვაშლი, რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთებაა შესაძლებელი?

2. ქვემოთ მოცემულია 2-განზომილებიანი დიაგრამა; ბადე გვიჩვენებს ბანქოს დასტიდან შემთხვევით ერთი ბარათის ამოღებისას მისაღებ ყველა შესაძლო შემთხვევას.



3. დიაგრამაზე მოცემულია ორი ბურთი; მათი დატრიალების შემდეგ, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტია, რომ გაჩერდეს ისრები?

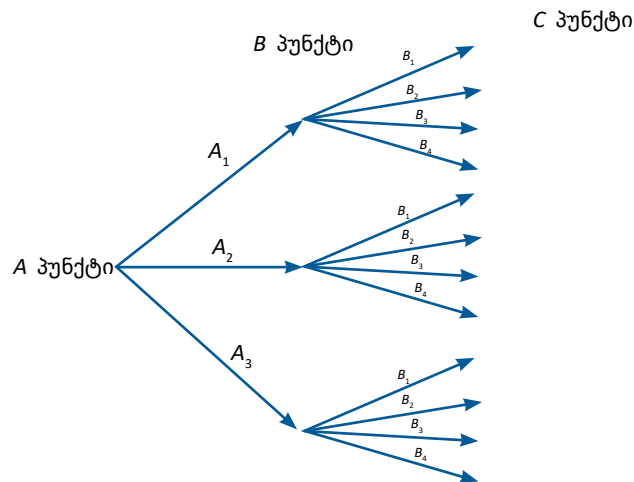
ა) ბ) გ) დ)



4. ტურისტული კომპანია მომხმარებელს სთავაზობს დაცული ტერიტორიების დათვალიერებას შემდეგი პირობებით: მარშრუტის საწყისი A პუნქტიდან B შუალედურ პუნქტამდე არის სამი მარშრუტი, ხოლო B შუალედური პუნქტიდან საბოლოო C პუნქტამდე არის კიდევ ოთხი მარშრუტი. მომხმარებელმა უნდა შეარჩიოს ერთი ისეთი მარშრუტი, რომ საწყისი A პუნქტიდან მივიდეს საბოლოო C პუნქტამდე, ოღონდ აუცილებლად უნდა გაიაროს B შუალედური პუნქტი. რამდენი ასეთი მარშრუტის არჩევის შესაძლებლობა აქვს მომხმარებელს?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** შემოვიტანოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, საწყისი A პუნქტიდან B შუალედურ პუნქტამდე მისასვლელი სამი მარშრუტია A_1, A_2, A_3 , ხოლო B შუალედური პუნქტიდან საბოლოო C პუნქტამდე მისასვლელი ოთხი მარშრუტია B_1, B_2, B_3, B_4 . შევადგინოთ მარშრუტების შესაბამისი დიაგრამა:

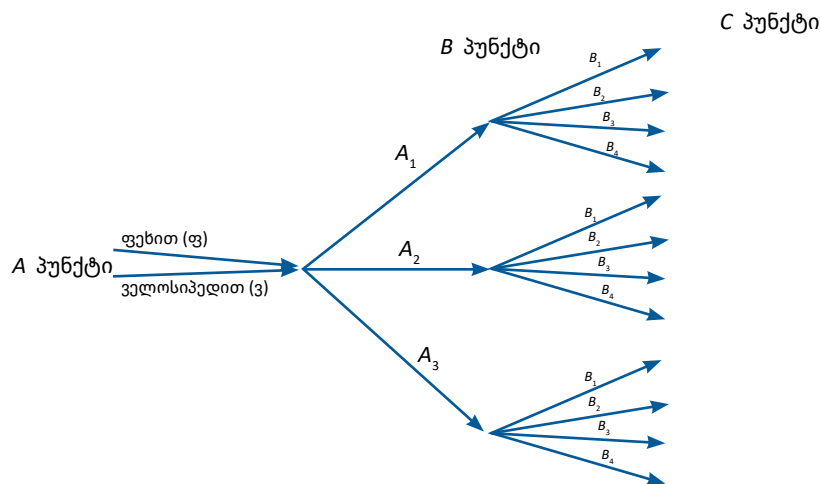
სავარჯიშოები



5. ➡ ამოცანა 4-ის გაგრძელება

განვიხილოთ პირველ სიტუაციაში განხილული მაგალითი, მხოლოდ დავამატოთ, რომ ტურისტს შეუძლია არჩეული მარშრუტი გაიაროს ან ფეხით, ან ველოსიპედით (ამის შესაძლებლობა არსებობს). ამ პირობებში რამდენი ასეთი მარშრუტის ამორჩევის შესაძლებლობა აქვს მომხმარებელს?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** ცხადია, იმავე შემოტანილი აღნიშვნებით დიაგრამა შემდეგ სახეს მიიღებს:



6. განვიხილოთ ერთი კამათლისა და ერთი მონეტის ერთობლივი აგდება. ვთქვათ, ვაგდებთ ერთხელ, შედეგთა რამდენი ვარიანტი შეიძლება იყოს?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** ცხადია, კამათელზე შეიძლება მოვიდეს ექვსი შესაძლო შედეგიდან (1; 2; 3; 4; 5; 6) ერთ-ერთი, ხოლო მონეტაზე შეიძლება მოვიდეს ორი შედეგიდან (გერბი (გ), საფასური (ს)) ერთ-ერთი. გამრავლების წესით დაითვალეთ რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მოვიდეს? შეეცადეთ დიაგრამით წარმოადგინოთ ვარიანტების რაოდენობა.

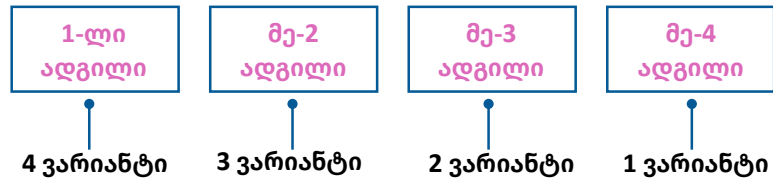
3.2. ფაქტორიალი, გადანაცვლება, წყობა, ჯუფთება

ზოგიერთ საყოფაცხოვრებო ან მათემატიკურ ამოცანაში შესაძლო ვარიანტების დასათვლელად მხოლოდ გამრავლების წესი არაა საკმარისი, მათ გამოსათვლელად საჭიროა სხვა წესების და ფორმულების გამოყენება.

ფაქტორიალი	n-ის ფაქტორიალი ეწოდება პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლს n-ის ჩათვლით და აღინიშნება შემდეგნაირად: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
შესავალი ამოცანა თეორიის ახსნისთვის:	მოცემულია 4 ლათინური ასობგერა, რომელიც უნდა დავალაგოთ სხვადასხვა თანმიმდევრობით. რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს, რომ დავალაგოთ სიმბოლოები A, B, C, D? $4 \times 3 \times 2 \times 1$ დიაგრამიდან ვხედავთ, რომ მათი დალაგების 24 სხვადასხვა ვარიანტი. როდესაც ვიწყებთ დალაგებას: ■ თავდაპირველად არსებობს 4 ვარიანტი არჩევანის გაკეთების; ■ მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ ერთ-ერთ ასობგერას, გვრჩება 3 ასობგერა და თითოეულისთვის არის 3 სხვადასხვა ვარიანტი; ■ მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ მეორე ასობგერას, თითოეულისთვის გვრჩება 2 და ბოლოს 1. გამოვიდა რომ უნდა გადავამრავლოთ რიცხვები: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 განვიხილოთ ახალი ნიშნობი წინა ნიმუშის მსგავსი ნიმუში, მასალის ახსნით მასალის ახსნა ■ რამდენნაირად არის შესაძლებელი თაროზე ოთხი სხვადასხვა წიგნის დაწყობა?	 სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. შემოვიტანოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, თაროზე წიგნის დალაგების პირველი ადგილის ნომერია 1, მეორე ადგილის – 2, მესამის – 3 და მეოთხის – 4. ამ შემთხვევაში თაროს პირველ ადგილზე შეიძლება დავდოთ ოთხივე წიგნიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების 4 ვარიანტი. ამის შემდეგ თაროს მეორე ადგილზე შეიძლება დავდოთ დარჩენილი სამი წიგნიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს

განვაზოგადოთ აღნიშნული სიტუაცია

დალაგების 3 ვარიანტი. მომდევნო – მესამე ადგილზე დარჩება უკვე ორი ვარიანტი და საბოლოო მეოთხე ადგილზე გვექნება წიგნის განთავსების ერთი ვარიანტი. სქემატურად ეს პროცესი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:



წიგნების დალაგების ვარიანტების რაოდენობის დასათვლელად გამოვიყენოთ ვარიანტების დათვლის გამრავლების წესი. რადგან თაროს თითოეულ ადგილზე წიგნების განლაგების ვარიანტების რაოდენობები ცნობილია და ეს განლაგებები უნდა განხორციელდეს ერთდროულად, ამიტომ საბოლოო ვარიანტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი.

$$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

მაშასადამე, თაროზე წიგნების დალაგების ვარიანტების რაოდენობაა 24.

დავუშვათ, გვაქვს რაღაც n ცალი განსხვავებული ელემენტი და ისინი რაღაც წესით უნდა დავალაგოთ. ამ დალაგების შემდეგ მივიღებთ ე.წ. დალაგებულ n -ეულს.

? საკვანძო კითხვა: რამდენი დალაგებული n -ეულის მიღება შეიძლება n ცალი განსხვავებული ელემენტისგან?

ზემოთ განხილული მაგალითის ანალოგიურად:

- პირველ ადგილზე შეიძლება განვალაგოთ n განსხვავებული ელემენტისგან ნებისმიერი ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების n ვარიანტი.
- ამის შემდეგ, მეორე ადგილზე შეიძლება განვალაგოთ დარჩენილი $n - 1$ ელემენტისგან ნებისმიერი ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების $n - 1$ ვარიანტი.
- მესამე ადგილზე გვაქვს დალაგების $n - 2$ ვარიანტი და ა.შ., საბოლოო მე- n -ე ადგილზე გვექნება დალაგების ერთი ვარიანტი.
- განლაგების მთლიანი ვარიანტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი.

$$\text{რაოდენობა} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

მიღებული ნამრავლის უფრო მოკლე ჩანაწერისთვის მათემატიკაში შემოტანილია აღნიშვნა:

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლს ეწოდება n -ის ფაქტორიალი და აღინიშნება შემდეგნაირად: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

გადაწვლა.

n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტებიანი სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ განლაგებას n -ელემენტებიანი გადაწვლა ეწოდება. გადაწვლათა რაოდენობა აღინიშნება P_n სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $P_n = n!$



ნიმუში 1 – გამოიანგარიშეთ

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$1) 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$2) \frac{7!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42$$

$$3) \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} = n$$



ნიმუში 2 – პრიზების განაწილება

რამდენაირად არის შესაძლებელი შვიდი სხვადასხვა პრიზი გაუნაწილოთ შვიდ ადამიანს?

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

გადაწვლა.

ნიმუში 1:

საიუბილეო საღამოზე 5 მომხსენებელი (A, B, C, D, E) უნდა გამოვიდეს. რამდენაირად შეიძლება ჩაეწერონ ისინი სიაში?

ამოხსნა: პირველი მომხსენებელი შეიძლება იყოს ამ 5-დან ერთ-ერთი, მეორე – დარჩენილი 4-დან ერთ-ერთი, მესამე – დარჩენილი სამიდან ერთ-ერთი და ა.შ. ბოლოს არჩევანიც არ აქვს. სულ ვარიანტების რაოდენობა იქნება $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

საზოგადოდ, თუ ელემენტთა რაოდენობაა n , არსებობს პირველი ადგილის დაკავების n ვარიანტი. თითოეული მათგანისთვის არსებობს მეორე ადგილის დაკავების $(n-1)$ ვარიანტი. როცა პირველი და მეორე ადგილები დაკავებულია, არსებობს მესამე ადგილის შევსების $(n-2)$ ვარიანტი და ა.შ. ბოლო მე- n ადგილის შესავსებად დავრჩება ერთი ვარიანტი. ნამრავლის წესით სულ გვაქვს:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n$$

წყობა

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას

მოცემულია 4 ლათინური ასობგერა A, B, C, D , რომლისგანაც გვინდა ამოვარჩიოთ 2 სხვადასხვა ასობგერა და დავაწყოთ სხვადასხვანაირად. რამდენი ვარიანტი არსებობს დაწყობის/დალაგების?



- თავდაპირველად არსებობს 4 ვარიანტი არჩევანის გაკეთების;
- მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ ერთ-ერთ ასობგერას, გვრჩება 3 ასობგერა და თითოეულისთვის არის 3 სხვადასხვა ვარიანტი;

გამოვიდა, რომ სულ არსებობს $4 \cdot 3 = 12$ ვარიანტი.

n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ k ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს **წყობა** ეწოდება. წყობათა რაოდენობა აღინიშნება A_n^k სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს $n = 4$ ელემენტი, გვსურს 2 ელემენტის ამორჩევა, ე.ი. $k = 2$ -ს. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ფორმულა გვეხმარება დავიანგარიშოთ რამდენი ასეთი ვარიანტი შეიძლება არსებობდეს, როდესაც რიცხვები პატარაა, ჩვენ შეგვიძლია ზეპირად დავითვალოთ ან დიაგრამის დახმარებით, მაგრამ როდესაც რიცხვები დიდია, ზეპირად ან დიაგრამით დათვლა მოუხერხებელია, ფორმულა კი გვეხმარება დავითვალოთ ვარიანტები.

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$$

შევნიშნოთ, რომ $A_n^0 = 1$, $A_n^n = 1$



ნიშნობა 3 – ავტოსადგომების განაწილება

ავტოსადგომზე არის ცხრა ერთადგილიანი ავტოფარეხი. ერთ სადამოს ავტოსადგომზე მოვიდა ხუთი მანქანა. რამდენნაირად არის შესაძლებელი ამ ხუთი მანქანის განაწილება მოცემულ ცხრა ავტოფარეხში?



სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, მანქანების გასაჩერებლად საჭიროა ცხრიდან ამოვირჩიოთ ხუთი ავტოფარეხი და შემდეგ მასში გავანაწილოთ დასაყენებელი მანქანები.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები, ვთქვათ, ერთი მანქანის ნომერია 1, მეორის – 2, მესამის – 3, მეოთხის – 4 და მეხუთის – 5.

ამ შემთხვევაში, პირველი მანქანა შეგვიძლია დავაყენოთ ცხრავე ავტოსადგომიდან ერთ-ერთში, ანუ გვაქვს მანქანის ავტოფარეხში დაყენების 9 ვარიანტი. ამის შემდეგ, მეორე მანქანა შეგვიძლია დავაყენოთ დარჩენილი რვა ავტოსადგომიდან ერთ-ერთში, ანუ გვაქვს მანქანის დაყენების 8 ვარიანტი. მომდევნო მესამე მანქანისთვის დარჩება 7 ვარიანტი, მეოთხისთვის 6 ვარიანტი, ხოლო მეხუთისთვის 5 ვარიანტი. ავტომანქანების დაყენების მთლიანი ვარიანტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი. მივიღებთ:

$$\text{რაოდენობა} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

ე.ი. მანქანების განაწილების რაოდენობაა 15 120.

გარდავქმნათ მიღებული რაოდენობების ჩანაწერი:

$$\text{რაოდენობა} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{4!} = \frac{9!}{(9-5)!} = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = 15\,120.$$

გამოვიდა, რომ ჩვენ მიერ შემოღებული ფორმულა სწორია.

მაშასადამე, ცხრა ელემენტიანი სიმრავლიდან ჩვენ ამოვარჩიეთ ხუთელემენტიანი ქვესიმრავლე და დავალაგეთ, **დავაწყვეთ**. ამიტომ აღნიშნულ ოპერაციას ჰქვია **წყობა**.

მათემატიკური მოდელირება:

ჩვენ შეგვიძლია მსგავსი ამოცანების ფორმულით ამოხსნა.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს, მივიღებთ:

$$n = 9, k = 5. A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15\,120$$

მინიშნება: ლოგიკურად და მსჯელობით ამოხსნა და დასაბუთება ყოველთვის მნიშვნელოვანია.



ნიმუში 4 – გაკვეთილების ცხრილი

მეთერთმეტე კლასში ისწავლება 12 საგანი. სამშაბათს კლასს აქვს ხუთი გაკვეთილი. რამდენადა ირად არის შესაძლებელი სამშაბათის გაკვეთილების ცხრილის შედგენა?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** ცხადია, საჭიროა 12 საგნიდან ავირჩიოთ ხუთი საგანი და შემდეგ გადავანაწილოთ (ანუ დავაწყოთ) ისინი ხუთ განსხვავებულ გაკვეთილზე. მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ 12 ელემენტიდან ხუთელემენტიანი წყობა:

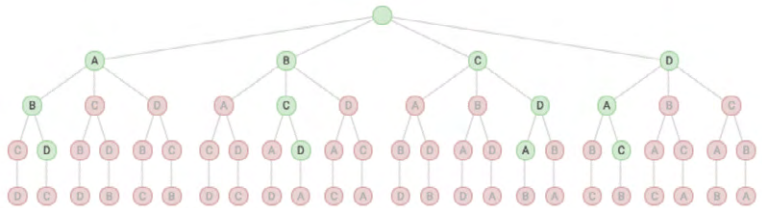
$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$$

ე.ი. გაკვეთილების ცხრილის შედგენის ვარიანტების რაოდენობაა 95 040.

ჯუფთება

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას

მოცემულია 4 ლათინური ასოებგერა A, B, C, D , რამდენი სხვადასხვა სამელემენტიანი ქვესიმრავლე შეიძლება შეიქმნას, რომლისგანაც გვინდა ამოვარჩიოთ 3 სხვადასხვა ასოებგერა, აქვე აღვნიშნოთ, რომ ასოების დაწყობას და თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს. A, B, C, D -ს რამდენი სხვადასხვა ქვესიმრავლე შეიძლება შეიქმნას?



n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ k ელემენტიან დაულაგებელ ქვესიმრავლეს **ჯუფდება** ეწოდება. ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება C_n^k სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

$$n = 4, k = 3$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

4 ასოებგერიდან, როდესაც ნებისმიერი 3 არჩევა გვსურს, 4 სხვადასხვა ვარიანტი გვექნება:

A, B, D ;

B, C, D ;

C, D, A ;

A, B, C .

➡ დაუბრუნდეთ და გავანაზილოთ თავიდან [3.1 გავკეთილის](#) დასაწყისში განხილული ნიმუში: მოსწავლეს უნდა აეღო 2 წიგნი;



ნიმუში 4

სიტუაცია 1:

დავუშვათ, თაროზე არის ორი წიგნი: **წიგნი N1** და **წიგნი N2** და სტუდენტმა თანმიმდევრობით უნდა აირჩიოს ორი წიგნი;

რა არჩევანი აქვს სტუდენტს?

ჯერ წიგნი N1 და შემდეგ წიგნი N2,

ან

ჯერ წიგნი N2 და შემდეგ წიგნი N1 ;

ანუ არის არჩევანის მხოლოდ ერთი ვარიანტი.

სიტუაცია 2:

თაროზე არის 5 წიგნი და სტუდენტს აქვს შესაძლებლობა, აირჩიოს ნებისმიერი 2 წიგნი თაროდან, მას არჩევანის რამდენი შესაძლო ვარიანტი აქვს?

მარჯვნივ მოცემულია დიაგრამა, რომელიც აადვილებს დავითვალოთ ვარიანტები:

მას შეუძლია აირჩიოს ჯერ N1 და შემდეგ N2 ან პირიქით, ამიტომ ეს ორი ვარიანტი ითვლება 1 არჩევანად, იმიტომ, რომ, ამ შემთხვევაში, არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას;

დავითვალოთ ვარიანტები და მივიღებთ, რომ სულ 10 სხვადასხვა ვარიანტია, რომლის მიხედვითაც სტუდენტმა შეიძლება აირჩიოს ორი წიგნი.

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	

წყობა

წიგნების არჩევის დროს, თუ მნიშვნელობა აქვს თანმიმდევრობას, რომელ ორ წიგნს აირჩევს სტუდენტი, მაშინ ჩვენ უნდა დავითვალოთ წყობა:

$$n = 5; \quad k = 2$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

ჯუფთება

წიგნების არჩევის დროს, თუ მნიშვნელობა არ აქვს თანმიმდევრობას, რომელ ორ წიგნს აირჩევს სტუდენტი თაროდან, მაშინ ჩვენ უნდა დავითვალოთ ჯუფთება:

$$n = 5; \quad k = 2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$



ნიშუი 5 – ფრენბურთელთა გუნდი – მათემატიკის მოყვარულთათვის

ფრენბურთელთა გუნდში არის 14 სპორტსმენი. გუნდის მწვრთნელმა თამაშის სასტარტო შემადგენლობაში უნდა შეიყვანოს 6 ფრენბურთელი. რამდენნაირად შეუძლია მწვრთნელს სასტარტო ექვსეულის შედგენა?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** ცხადია, მოცემული სიტუაცია ჰგავს წყობის დროს განხილული მანქანების განაწილების ამოცანას, თუმცა ამ შემთხვევაში არაა საჭირო არჩეული სპორტსმენების გადანაცვლება ადგილებზე, ისინი ერთ მთლიან გუნდში არიან გაერთიანებულნი. განვიხილოთ 14 ელემენტიდან 6-ელემენტიანი წყობა, ეს არის 14 ელემენტიდან არჩეული 6 ელემენტი, რომლებიც შემდეგ გადალაგებული, ანუ გადანაცვლებულია ერთმანეთში. ჩვენს სიტუაციაში ამორჩეული ექვსეულის ერთმანეთში გადანაცვლება არაა საჭირო, რადგან ისინი ერთ მთლიან გუნდში არიან გაერთიანებულნი.

შესაბამისად, საძიებელი რაოდენობა 14 ელემენტიდან 6-ელემენტიან წყობაზე, ანუ A_{14}^6 -ზე, ნაკლები იქნება 6 ელემენტიან გადანაცვლებაზე, ანუ P_6 -ჯერ.

$$\begin{aligned} \text{რაოდენობა} &= \frac{A_{14}^6}{6} = \frac{14!}{(14-6)!} : 6! = \frac{14!}{(14-6)! \cdot 6!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 = 3\,003 \end{aligned}$$

ე.ი. სასტარტო ექვსეულის შედგენის ვარიანტთა რაოდენობაა 3 003.

მაშასადამე, თოთხმეტელემენტიანი სიმრავლიდან ჩვენ ამოვარჩიეთ ექვსელემენტიანი დაულაგებელი ექვსიმრავლე.



ნიშნობა 6 – სტუდენტთა განათლება

პრეზენტაციის მოსამზადებლად 11 სტუდენტი უნდა განაწილდეს ორ ჯგუფში ისე, რომ ერთ ჯგუფში იყოს 5 სტუდენტი, ხოლო მეორეში 6 სტუდენტი. რამდენნაირად შეიძლება ასეთი ჯგუფების შედგენა?

✓ **სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება.** ჯერ განვიხილოთ 11-დან რამდენი 5 სხვადასხვა ვარიანტის ამორჩევაა შესაძლებელი. ცხადია, ეს იქნება 11-დან 5 ელემენტისანი ჯგუფება, ანუ C_{11}^5 . ყოველი ასეთი ხუთეულის შედგენის შემდეგ, დარჩენილი ექვსეული თავისთავად შეადგენს ექვს სტუდენტიან ჯგუფს, ანუ მათი ცალკე გამოთვლა არაა საჭირო. მაშასადამე, შერჩევის საჭირო რაოდენობა იქნება:

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 462$$



ინფორმაცია მათემატიკის მოყვარულთათვის

ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $\emptyset$ და თვითონ A, A სიმრავლის ქვესიმრავლეებად ითვლება.

- n -ელემენტისანი სიმრავლისათვის არსებობს ერთადერთი n -ელემენტისანი ჯგუფდება. ეს ჯგუფებაა თვითონ A სიმრავლე: $C_n^n = 1$.
- ცარიელი სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც n -ელემენტისანი სიმრავლის 0-ელემენტისანი ქვესიმრავლე: $C_n^0 = 1$.

სამართლიანია ფორმულა

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

ანუ, n -ელემენტისანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n .

- კავშირი C_n^m -სა და A_n^m -ს შორის შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულით:

$$A_n^m = m! \cdot C_n^m.$$



სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ:
ა) $5!$; ბ) $4! - 3!$; გ) $\frac{7!}{6!}$; დ) $\frac{11!}{9!}$.
2. გამოთვალეთ:
ა) $\frac{10! \cdot 2!}{12!}$; ბ) $\frac{15!}{13! \cdot 3!}$.
3. საიუბილეო საღამოზე 5 მომხსენებელი (A, B, C, D, E) უნდა გამოვიდეს. რამდენნაირად შეიძლება ჩაეწერონ ისინი სიაში?
4. ა) P_4 ; ბ) $P_6 - P_5$; გ) A_6^4 ; დ) $A_7^3 + A_5^2$;
ე) C_5^5 ; ვ) C_{10}^7 ; ზ) $A_5^8 : C_5^3$; დ) $C_5^6 \cdot A_8^6$.
5. მაგიდასთან 7 ადგილია. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დავსვათ 7 მოწვეული სტუმარი ამ მაგიდასთან?
6. ცხრა მგზავრის ცხრა ვაგონში განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ რამდენიმე მგზავრის ერთ ვაგონში მოხვედრა დაუშვებელია?
7. ჯგუფში ათი სტუდენტია. რამდენი განსხვავებული თანმიმდევრობით შეიძლება შევიდნენ სტუდენტები აუდიტორიაში?
8. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება კენტი ციფრებისაგან, თუ ციფრების გამეორება შეუძლებელია?
9. საფეხბურთო ჩემპიონატში მონაწილეობს 18 გუნდი. ჩემპიონატის დასრულების შემდეგ ადგილების განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს?
10. 5 სტუდენტიდან უნდა შევადგინოთ 3 კაციანი გუნდი. რამდენი ვარიანტი არსებობს?
11. 3 ბავშვი საკონტროლო სამუშაოს შესასრულებლად შეგვიძლია დავსვათ საკლასო ოთახში მოთავსებულ 5 მერხზე. მერხებზე მათ დახვდება საკონტროლო სამუშაოს ბილეთები. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ ა) ყველა მერხზე ერთი და იგივე ბილეთია; ბ) მერხებზე დევს განსხვავებული ვარიანტის ბილეთები?
12. კრებამ შვიდი კანდიდატიდან უნდა აირჩიოს თავმჯდომარე, თავმჯდომარის მოადგილე და მდივანი. არჩევის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?
13. ტურისტთა ხუთმა ჯგუფმა უნდა აირჩიოს ტურისტული კომპანიის მიერ შეთავაზებული ხუთი სხვადასხვა ტურისტული მარშრუტიდან მხოლოდ ერთი. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ:
ა) ყოველ მარშრუტზე მიდის მხოლოდ ერთი ჯგუფი;
ბ) ერთ მარშრუტზე შესაძლებელია გაემგზავროს სხვადასხვა ჯგუფი;
14. სილამაზის კონკურსში მონაწილეობს 18 გოგონა. პირველი სამი პრიზის განაწილების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?
15. რამდენი ორნიშნა რიცხვი იწერება განსხვავებული კენტი ციფრებით?
16. რამდენი სამნიშნა რიცხვი იწერება განსხვავებული კენტი ციფრებით?

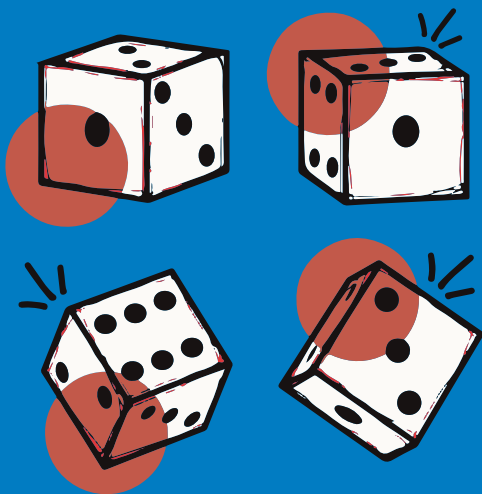
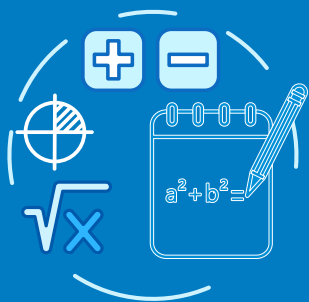
სავარჯიშოები

17. სეიფის კოდი შედგება ხუთი განსხვავებული ციფრისგან. რამდენი ასეთი კოდის შედგენა შესაძლებელია?
18. სეიფის კოდი შედგება ხუთი ციფრისგან. რამდენი ასეთი კოდის შედგენა შესაძლებელია, თუ კოდი „00000“ დაუშვებელია?
19. მანქანის ნომერია „RR 153 KK“. რამდენ მანქანას ექნება იგივე სერია „RR ... KK“, თუ ცნობილია, რომ ნომრის ყველა ციფრი უნდა იყოს განსხვავებული?
20. მანქანის ნომერია „RM 153 KX“. რამდენ მანქანას ექნება იგივე ნომერი 153, თუ ცნობილია, რომ სერიის ყველა ასო უნდა იყოს განსხვავებული (ინგლისურ ანბანში არის 26 ასო)?
21. რამდენი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9, თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?
22. რამდენი ლუწი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9, თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?
23. რამდენი კენტი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9, თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?
24. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 8 სხვადასხვა სათამაშოდან საჩუქრად ამოვირჩიოთ 3 სათამაშო?
25. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 11 სხვადასხვა სამკაულიდან საჩუქრად ამოვირჩიოთ 4 სამკაული?
26. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 9 სხვადასხვა ყვავილისაგან შევკრათ 5 ყვავილიანი თაიგული?
27. სიბრტყეზე მოცემულია 12 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი განსხვავებული წრფე შეიძლება გაივლოს ამ წერტილებზე?
28. სკოლის 23-მა კურსდამთავრებულმა გადაწყვიტა ერთმანეთს სურათები გაუცვალოს. რამდენი ფოტოსურათი დასჭირდებათ მათ ამისათვის?
29. სიბრტყეზე მოცემულია 14 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი განსხვავებული სამკუთხედი შეიძლება ავაგოთ სიბრტყეზე, რომელთა წვეროები მოცემულ წერტილებშია?
30. 7 სხვადასხვა საჩუქრიდან უნდა აირჩეს 3 საჩუქარი და გაუნაწილდეს 3 ადამიანს. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ თითოეულ ადამიანს უნდა შეხვდეს ერთი საჩუქარი?
31. კლასში 24 მოსწავლეა. რამდენნაირად შეიძლება მათგან შეირჩეს 7 ბავშვი, თუ:
 - ა) შვიდივემ უნდა დაწეროს საკონტროლო მათემატიკაში;
 - ბ) შვიდივემ უნდა დაწეროს სხვადასხვა საკონტროლო შვიდ განსხვავებულ საგანში, ამასთან ერთი მოსწავლე წერს მხოლოდ ერთ საკონტროლოს.
32. სამშენებლო კომპანიას ჰყავს 12 სატვირთო მანქანა, რომლებიდანაც უნდა გამოიყოს 8 მანქანა 8 სხვადასხვა ობიექტისთვის, ამასთან თითოეული ობიექტისთვის უნდა გამოიყოს ერთი მანქანა. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ:
 - ა) მანქანები სხვადასხვა ტვირთამწეობისაა; ბ) მანქანები ერთნაირი ტვირთამწეობისაა;



- ა) არცერთი ტუზი; გ) ზუსტად ორი ტუზი;
ბ) მხოლოდ ერთი ტუზი; დ) ოთხივე ტუზი;

IV. დავალების წარდგენა



კომპლექსური დავალება



საკვანძო კითხვა:

- გიფიქრიათ თუ არა, რა განსხვავებაა თეორიულ და ექსპერიმენტულ ალბათობებს შორის? შესაძლებელია თუ არა თეორიულად ერთი მოვლენის მოხდენის ალბათობა განსხვავდებოდეს რეალურად მისი მოხდენის ალბათობაზე?



თქვენი დავალება

1. შეისწავლეთ თეორიული და ექსპერიმენტული ალბათობა და დაითვალეთ რა შეიძლება იყოს კამათლის გაგორების შედეგად წყვილის მოსვლის ალბათობა? ან ნებისმიერი თქვენ მიერ სასურველი შედეგის მოხდენის ალბათობა?
2. რეალურად აიღეთ კამათელი, გააგორეთ და შეადარეთ თქვენი მონაცემები თეორიულად შესაძლო შედეგებს.
3. შეარჩიეთ თქვენთვის სასურველი საკვლევი საკითხი, გამოთქვით ვარაუდი: რა არის თქვენ მიერ შერჩეული მოვლენის მოხდენის თეორიული ალბათობა; შემდეგ შეამოწმეთ ექსპერიმენტულად შედეგები და დაწერეთ ანალიზი.

დავალება წარმოადგინეთ თქვენთვის მისაღები ფორმით.

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ განისაზღვრება რეალური მოვლენის ხდომილობის ალბათობა? როგორ გვეხმარება არჩევანის გაკეთებაში და სწორი გადაწყვეტილების მიღებაში შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის ცოდნა?
- რა დაადგინეთ კვლევის შედეგად? რამდენად მნიშვნელოვანია რეალური ექსპერიმენტის დაორგანიზება და ჩატარება?
- რა მოხდება თუ მხოლოდ თეორიულ მასალას დავყვრდნობით და არ ვეცდებით რეალურ ცხოვრებაში ცოდნის გამოყენებას?

თემა 4. ხდომილობის ალბათობა

4.1. ხდომილობა; ხდომილობის ალბათობის განმარტება

ადამიანები ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად ვიყენებთ ტერმინს „ალბათ“. ამ სიტყვას ვიყენებთ იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა გამოვთქვათ ჩვენი მოსაზრება რაიმე მოვლენის მოხდენის ან არმოხდენის შესახებ. მაგ. „ხვალ ალბათ წვიმა იქნება“, „ახალი წლის დღეებში პროდუქტებზე ფასები, ალბათ, ისევ მოიმატებს“, „ორ წელიწადში, ალბათ, ვერ შევაგროვებ ახალი მანქანის შესაძენ თანხას“ და ა. შ. ცხადია, ყველა ამ მოსაზრებაში ჩვენ ვითვალისწინებთ რაღაც წინაპირობებს და მათზე დაყრდნობით ვამბობთ ამ დასკვნებს. მაგ.: გუშინ და დღეს წვიმდა და ჩვენი მოსალოდნელი ვარაუდია, რომ ხვალაც იწვიმებს. გასულ რამდენიმე წელიწადს, ახალი წლის დღეებში, პროდუქტებზე ფასები ყოველთვის მატულობდა და ჩვენი ვარაუდი არის რომ, მოახლოებულ ახალი წლის დღეებშიც იგივე განმეორდება.

თუ ზემოთ განხილულ მაგალითებს მივუდგებით მათემატიკურად, მაშინ არცერთ წარმოთქმულ მოსაზრებაზე არ შეიძლება დამაჯერებლად ვთქვათ, რომ იგი ჭეშმარიტია ან მცდარია. მათემატიკაში სიტყვა „ალბათობა“ გამოიყენება მკაცრად განსაზღვრული აზრით, რომელსაც არანაირი კავშირი არა აქვს ადამიანის სუბიექტურ მოსაზრებებთან, ან სურვილებთან.

განვიხილოთ ერთი მონეტის აგდება. ცხადია, წინასწარ ჩვენ არ ვიცით რა მოვა, მაგრამ ვიცით, რომ მოსალოდნელი შედეგია ან გერბი (გ), ან საფასური (ს). თუ მონეტა არ არის ყალბი, მაშინ სხვა შედეგის მოსვლა უბრალოდ შეუძლებელია. მაშასადამე, მონეტის აგდებისას გერბის ან საფასურის მოსვლის შესაძლებლობა თანაბრად შესაძლებელია. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ქმედებებს, რომელთა ყველა შესაძლო შედეგის მოსვლა თანაბრად შესაძლებელია.

შემთხვევითი ექსპერიმენტი

ალბათობის თეორიის შესწავლისთვის საჭიროა შესაბამისი ტერმინებისა და აღნიშვნების გაცნობა. ქმედებას, რომელიც შეიძლება რაღაც კონკრეტული შედეგით დასრულდეს, უწოდებენ **შემთხვევით ექსპერიმენტს**. ალბათობის თეორიაში განხილული შემთხვევითი ექსპერიმენტი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

ა) ექსპერიმენტის შედეგთა რაოდენობა უნდა იყოს სასრული, მათგან ყოველი ორი შედეგი ერთდროულად ვერ განხორციელდება;

ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის დარგს, რომელიც შეისწავლის ისეთი მოვლენების მათემატიკურ მოდელებს, რომელთა მოსალოდნელი ყველა შედეგი ცნობილია და მათი განხორციელება თანაბრად შესაძლებელია.

ბ) ექსპერიმენტის შედეგის წინასწარ დადგენა შეუძლებელია;

გ) ექსპერიმენტი, პირობების შეუცვლელად, შეიძლება ჩავატაროთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც ჩვენ მოგვსურვება.

შემთხვევითი ექსპერიმენტის მაგალითებია: გერბის აგდება, კამათლის გაგორება, ბურიალის დატრიალება, მონეტის აგდება და ა.შ; ყველა იმ მოსალოდნელ შედეგს, რაც შეიძლება თითოეულ ექსპერიმენტს მოჰყვეს – ეწოდება **ხდომილობა**, ხოლო ყველა შესაძლო ხდომილობის ერთობლიობას – ხდომილობათა სიმრავლე.

შემთხვევითი ექსპერიმენტი	მონეტის აგდება	კამათლის გაგორება	ბურიალას დატრიალება
			
შედეგები- ხდომილობათა სიმრავლე	{გერბი,საფასური}	{1;2;3;4;5;6}	{ წით.ნარინჯ. მწვანე,ლურჯი }

- **მონეტის აგდება** შეიძლება დასრულდეს საფასურის ან გერბის მოსვლით; შესაბამისად ხდომილობებია: საფასური და გერბი, ხოლო ხდომილობათა სიმრავლეა: {გერბი,საფასური};



მითითება: შეგახსენებთ, სიმრავლის ელემენტებს ვწერთ ფიგურულ ფრჩხილებში { }, ხოლო სიმრავლეს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით;

- **კამათლის გაგორების დროს**, ექსპერიმენტი შეიძლება დასრულდეს 1-ის, 2-ის, 3-ის, 4-ის, 5-ის, ან 6-ის მოსვლით; შესაბამისად, კამათლის გაგორების ექსპერიმენტის ხდომილობათა სიმრავლეა: {1;2;3;4;5;6}; ხოლო 1, 2, 3, 4, 5 ან 6 ხდომილობებია. (ანუ ის, რაც შეიძლება მოხდეს);
- მიღებულია, რომ ხდომილობათა სიმრავლეს აღბათობაში აღვნიშნავთ სიმბოლოთი Ω , (იკითხება ომეგა), $n(\Omega)$ – სიმბოლოს მეშვეობით კი აღვნიშნავთ სიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობა.

თითოეულ შედეგს, რომლითაც შემთხვევითი ექსპერიმენტი შეიძლება დასრულდეს, ეწოდება **ელემენტარული ხდომილობა**. ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს **ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე** ეწოდება. ზოგადად, იგი აღვნიშნავთ Ω სიმბოლოთი, ხოლო მასში შემავალი ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა აღვნიშნავთ $n(\Omega)$ -თი.



ნიმუში 1 – განვიხილოთ ორი ექსპერიმენტი და გავანალიზოთ შედეგები

ა) მონეტის აგდების ექსპერიმენტში შეიძლება მოვიდეს გერბი ან საფასური; ე.ი. $\Omega = \{1; 2;\}$

$$n(\Omega) = 2;$$

როგორც ვიცით, მონეტის აგდების დროს შეიძლება მოვიდეს საფასური ან გერბი, ვამბობთ, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{2}$. ხოლო გერბის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{2}$.

მათემატიკაში ამ ფაქტს ვწერთ შემდეგნაირად:

$$P(\text{საფასური}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{გერბი}) = \frac{1}{2}$$

P – აღნიშნავს ალბათობას (Probability)

ბ) კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში – ექვსი ელემენტარული ხდომილობაა, ანუ კამათლის გაგორებისას მოვა ან 1, ან 2, ან 3, ან 4, ან 5, ან 6;

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ და } n(\Omega) = 6$$

თითოეულის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{6}$

■ **კითხვა:** კამათლის გაგორების შედეგად, რამდენად ხშირად შეიძლება მოვიდეს ლუწი რიცხვი ან კენტი?

კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში შემთხვევითი ხდომილობა შეიძლება იყოს:

$$A = \{\text{კენტი რიცხვები}\} = \{1; 3; 5\} \text{ ან } B = \{\text{ლუწი რიცხვები}\} = \{2; 4; 6\}$$

კამათლის გაგორების შედეგად, ლუწი რიცხვის მოსვლათა შესაძლო რაოდენობაა –3, ხოლო კენტი რიცხვის მოსვლის შესაძლო რაოდენობაა –3; შევადგინოთ სიხშირის ცხრილი და დავითვალოთ თითოეულის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე:

	ხდომილობათა რაოდენობა	ფარდობითი სიხშირე
კენტი	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
ლუწი	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(\text{კენტი რიცხვი}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ლუწი რიცხვი}) = \frac{1}{2}$$

როგორც ხედავთ, ალბათობა ექსპერიმენტის შედეგად ხდომილობის მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა;

რადგან A სიმრავლით აღვნიშნეთ კენტი რიცხვების ხდომილობა, ხოლო B სიმრავლით – ლუწი რიცხვების, სიმარტივისთვის, შეგვიძლია, ფორხილებში მივუთითოთ სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო.





$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

აქვე დავამატოთ, რომ A და B სიმრავლეები, $A \subseteq \Omega$ და $B \subseteq \Omega$

ტრადიციული კამათლის გაგორებისას, შეუძლებელია მოვიდეს 7; ამიტომ 7-ს ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა და მისი მოსვლის ალბათობაა 0;

თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{6}$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება მოცემული **ექსპერიმენტის შემთხვევითი ხდომილობა**. ხდომილობა აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: A ; B ; C და ა. შ. ხდომილობათა სივრცეში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი: $n(A)$; $n(B)$; $n(C)$. ცხადია, რომ ნებისმიერი A ხდომილობისთვის $A \subseteq \Omega$ და $n(A) \leq n(\Omega)$.

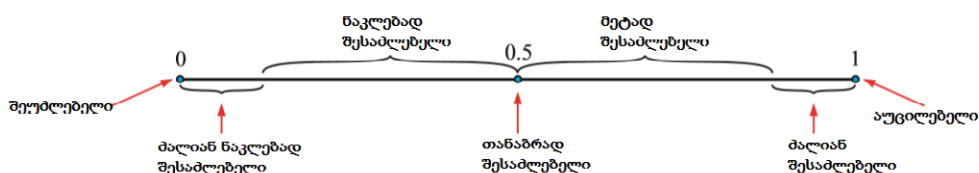
ზოგიერთი ხდომილობა შეიძლება ისე იყოს მოცემული, რომ ის არ შედიოდეს ხდომილობათა სივრცეში, მაშინ მას ეწოდება **შეუძლებელი ხდომილობა**. შესაძლებელია, რომ ხდომილობა დაემთხვეს ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს, მაშინ მას ეწოდება **აუცილებელი ხდომილობა**.

შეუძლებელი ხდომილობა – არის ხდომილობა, რომლის მოხდენის შანსიც 0%-ია, მიჩნეულია 0-ის ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობად.

აუცილებელი ხდომილობა – არის ხდომილობა, რომლის მოხდენის შანსიც 100%-ია, მიჩნეულია 1-ის ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობად.

სხვა ყველა ხდომილობის ალბათობა მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის.

ქვემოთ მოცემული რიცხვითი სხივი აღწერს, თუ როგორ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა სიდიდის ალბათობები, როგორ შეიძლება აღვწეროთ და სიტყვიერად შევაფასოთ ალბათობები:



ჩვეულებრივ, არსებობს ორი ტიპის ალბათობა:

- **ექსპერიმენტული (იგივე ემპირიული) ალბათობა**, რომელიც დაფუძნებულია უკვე მომხდარი ექსპერიმენტის შედეგებზე;
- **თეორიული ალბათობა**, რომელიც დაფუძნებულია ექსპერიმენტის განხორციელებამდე შანსების გამოთვლაზე. იგი ძირითადად იყენებს შანსების გათანაბრების პრინციპებს სიმეტრიულობაზე დაყრდნობით.

მიწინაშე: კამათლის გაგორების და მონეტის აგდებისას მიღებული ალბათობები, არის თეორიული ალბათობები, რეალური ექსპერიმენტის დროს შეიძლება არ განმეორდეს იგივე შედეგები;

ექსპერიმენტული ალბათობა

შემთხვევითი ექსპერიმენტის განხორციელებისას, იმის აღსაწერად თუ რას ვაკეთებთ ან რა შედეგები მივიღეთ, ვიყენებთ შემდეგ ტერმინოლოგიას:

- **ცდათა რიცხვი** გვიჩვენებს ერთი ტიპის ექსპერიმენტის გამეორებათა რაოდენობას;
- **ელემენტარული ხდომილობები** არის ერთი ექსპერიმენტისას მისაღები სხვადასხვა შესაძლო შედეგები;
- ელემენტარული ხდომილობის **სიხშირე** გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ განხორციელდა მოცემული ხდომილობა;
- ელემენტარული ხდომილობის **ფარდობითი სიხშირე** არის წილადი, რომელიც გვიჩვენებს მოცემული ხდომილობის განხორციელებათა რაოდენობა ცდათა რიცხვის რა ნაწილია.



კვლევითი აქტივობა: კამათლის გაგორება

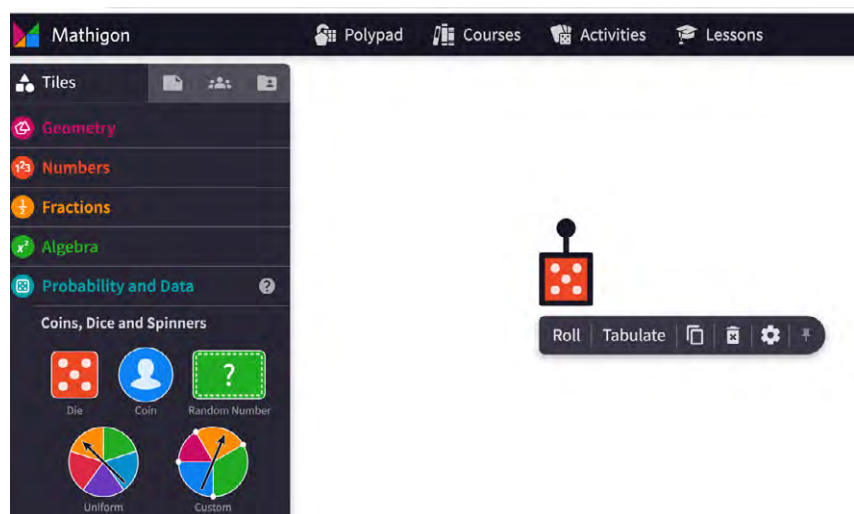
ექსპერიმენტი

? საკვანძო კითხვა:

რა განსხვავებაა
თეორიულ და
ექსპერიმენტულ
ალბათობებს
შორის?

თეორიულად ჩვენ ვიცით, რომ კამათლის გაგორებისას თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{6}$ -ია; თეორიულად, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ კამათელს გავაგორებთ 6-ჯერ, ყველა შედეგი უნდა მივიღოთ.

- აიღეთ სახლში კამათელი, ჩაატარეთ ექსპერიმენტი, გააგორეთ 6-ჯერ და ჩაინიშნეთ შედეგები; რამდენჯერ მოვიდა თითოეული ხდომილობა (1,2,3,4,5, ან 6) ?
- შედით ვებ-გვერდზე [Mathigon](https://mathigon.org/), მარცხენა მხარეს ჩამონათვალში ნახეთ Probability, ამოარჩიეთ კამათელი, გააქტიურეთ კამათელი და დააწკაპეთ ღილაკზე (Roll); დააორგანიზეთ შედეგები ცხრილში.





კვლევითი აქტივობა: კამათლის გაგორება

აქსპერიმენტი

? საკვანძო კითხვა:

რა განსხვავებაა
თეორიულ და
ექსპერიმენტულ
აღბათობებს
შორის?

ბ) წიგნის ავტორი შევიდა ვებ-გვერდზე გააგორა კამათელი 20-ჯერ, ქვე-
მოთ მოცემულია შედეგები:

კამათლის ხდომილობა	მოსვლის რაოდენობა	ფარდობითი სიხშირე
1	5	$\frac{5}{20} = 25\%$
2	2	$\frac{2}{20} = 1\%$
3	5	$\frac{5}{20} = 25\%$
4	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
5	3	$\frac{3}{20} = 15\%$
6	4	$\frac{4}{20} = 20\%$

როგორც ცხრილში ხედავთ, 20-ჯერ გაგორებისას 4-იანი მოვიდა ერთხელ, თანაბარი შედეგები არ დაჯდა; ცხრილში დაორგანიზებულია ასევე თითო-
ეულის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე, რომელიც შემდეგ წარმოდგენი-
ლია პროცენტის სახით. თითოეული ხდომილობის მოსვლის აღბათობა
შეესაბამება ფარდობით სიხშირეს.

თუ ექსპერიმენტს ვატარებთ 20-ჯერ, თითოეული ხდომილობის მოსვლის
აღბათობა არის ექსპერიმენტისას ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა
შეფარდებული ჩატარებული ექსპერიმენტის რაოდენობასთან.

$$P(4) = \frac{1}{20} = \frac{\text{ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა}}{\text{ექსპერიმენტის ჩატარების რაოდენობა}}$$

კონკრეტული ელემენტარული ხდომილების მოსვლის აღბათობა გამო-
ითვლება ფორმულით:

$$\text{ექსპერიმენტული აღბათობა} = \frac{\text{ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა}}{\text{ექსპერიმენტის ჩატარების რაოდენობა}}$$

მაგალითად, კონკრეტული კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში $A = \{5\text{-ზე}$
 $\text{ნაკლები რიცხვები}\} = \{1, 2, 3, 4\}$,

ხოლო, $B = \{4\text{-ზე მეტი რიცხვები}\} = \{5; 6\}$

$$P(A) = \frac{13}{20} = 65\%, \quad P(B) = \frac{7}{20} = 35\%$$

$$P(A) + P(B) = 1$$

თუ A-თი აღვნიშნავთ, რომელიმე ხდომილობათა სიმრავლეს, ხოლო Ω
ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, მაშინ:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ექსპერიმენტული ალბათობა არის ამ ექსპერიმენტში მოცემული ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობის რიცხვითი, წილობრივი მაჩვენებელი. დავუშვათ, გვინდა, რომ განხორციელდეს რაიმე B ხდომილობა, ცხადია, იგი განხორციელდება იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტის შედეგად განხორციელდა A ხდომილობაში შემავალი რომელიმე ელემენტარული ხდომილობა. ამ ელემენტარულ ხდომილობებს ეწოდება A ხდომილობის ხელშემწყობი ხდომილობები, ცხადია, მათი რაოდენობა იქნება $n(A)$. ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე წარმოადგენს ყველა შესაძლო ხდომილობებს და მათი რაოდენობაა $n(\Omega)$.

მოცემულ ექსპერიმენტში რაიმე A ხდომილობის ალბათობა უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო მნიშვნელი ელემენტარულ ხდომილობათა მთლიანი რაოდენობაა. იგი აღინიშნება $P(A)$ სიმბოლოთი და უდრის წილადს:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ეს არის ხდომილობის კლასიკური განმარტება.

ზოგადად, რადგან ნებისმიერი A ხდომილობისთვის

$n(A) \leq n(\Omega)$, ამიტომ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$. რადგან წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ $P(A) \geq 0$. საბოლოოდ, მივიღეთ, რომ ნებისმიერი A ხდომილობისთვის $P(A)$, აკმაყოფილებს უტოლობას: $0 \leq P(A) \leq 1$.

რიცხვს, რომელსაც უახლოვდებიან ხდომილობის ფარდობით სიხშირეები, ამ ხდომილობის ექსპერიმენტული ალბათობა ეწოდება. იგი არის, ერთგვარად, ხდომილობის განხორციელების შანსი მოცემულ ექსპერიმენტში.



ნიმუში 2 – ახსნა

რა არის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას არ მოვა 3-ზე ნაკლები რიცხვი?

ექსპერიმენტი მდგომარეობს კამათლის ერთხელ გაგორებაში.

A შემთხვევითი ხდომილობა: $A = \{3\text{-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა}\}$, $A = \{1; 2\}$, $n(A) = 2$;

ცნობილია, რომ ამ ექსპერიმენტში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ და $n(\Omega) = 6$.

განვიხილოთ ხდომილობა: არ მოვა 3-ზე ნაკლები რიცხვი, ანუ მოვა 3-ზე მეტი ან ტოლი რიცხვი, ე.ი. არ შესრულდება A ხდომილობა.

ამ ხდომილობას უწოდებენ A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას და აღნიშნავენ $\bar{A}$ სიმბოლოთი.





ცხადია, რომ $\bar{A} = \{3; 4; 5; 6\}$ და $n(\bar{A}) = 4$.

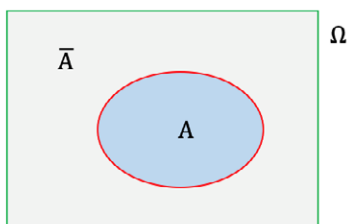
მარტივად ჩანს, რომ $n(\Omega) = n(A) + n(\bar{A}) = 2 + 4 = 6$:

ახლა განვიხილოთ A და $\bar{A}$ ხდომილობების ალბათობები.

ხდომილობის ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, მივიღებთ: $P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{4}{6}$,
ხოლო $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6}$.

მარტივად ჩანს, რომ $P(A) + P(\bar{A}) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$

თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამის სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



ნიშნობი 3

კონუსის ფორმის პლასტმასის ფიგურა ჰაერში ააგდეს 300-ჯერ, რის შედეგადაც იგი 203-ჯერ დაეცა გვერდით, ხოლო 97-ჯერ ფუძით. ამ ცდაზე დაკვირვებით შეგვიძლია ვთქვათ:

აღნიშნული ექსპერიმენტის შედეგები აღებულია (IB-ის წიგნიდან)

- ცდათა რიცხვია 300;
- ელემენტარული ხდომილობებია „გვერდი“ და „ფუძე“;
- „გვერდის“ და „ფუძის“ სიხშირეები შესაბამისად, არის 203 და 97;
- „გვერდის“ ფარდობითი სიხშირე არის $\frac{203}{300} \approx 67.7\%$;
- „ფუძის“ ფარდობითი სიხშირე არის $\frac{97}{300} \approx 32.3\%$.

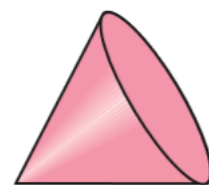
როდესაც სხვა დამატებითი მონაცემები არ გაგვაჩნია, თითოეული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე არის მათი მოხდენის ალბათობის საუკეთესო შეფასება.

ე.ი. ე.წ. **ექსპერიმენტული ალბათობა** არის ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე.

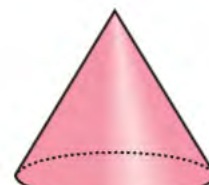
ეს ფაქტი მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$P(\text{გვერდი}) \approx 0.677$$

$$P(\text{ფუძე}) \approx 0.323$$



გვერდი



ფუძე



ნიმუში 4

ქუთი აგორებს კამათლებს, რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

- ა) კამათლებზე მოსული რიცხვების ჯამი იქნება 5?
- ბ) მოვა წყვილები;
- გ) მოვა 1-იანი და 5-იანი;

იმისათვის, რომ თვალსაჩინო იყოს შედეგები, დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ცხრილში, ჩავთვალოთ, ერთი კამათელი არის წითელი ფერის, მეორე კი ლურჯის ფერის:

ცხრილით ნაჩვენებია, კამათ-
ლის გაგორებისას რა ვარიან-
ტები შეიძლება მოვიდეს, სულ
არის 36 ვარიანტი;

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

ა) როგორც ხედავთ, ორ კამათელზე მოსული რიცხვების ჯამი – 5 შეიძლება მოვიდეს

4-ჯერ, შესაბამისად, ალბათობა არის $P = \frac{4}{36}$;

ბ) ცხრილიდან ჩანს, რომ ორივე კამათელზე შეიძლება მოვიდეს 6 წყვილი რიცხვი:

(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)

$$P(\text{წყვილის მოსვლის}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

გ) ცხრილიდან ჩანს, რომ 1 და 5 შეიძლება მოვიდეს 2-ჯერ; წითელ კამათელზე 1 და ლურჯზე 5 ან წითელ კამათელზე 5 და ლურჯზე 1;

$$P(1\text{-ს და } 5\text{-ს მოსვლა}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$



ნიშნობა 5 – ნიშნობით ახსნა

დავუშვათ, კალათში დევს 9 თეთრი, 6 შავი და 5 წითელი ბურთული. კალათიდან, მასში ჩაუხე-
დავად, ვიღებთ ერთ ბურთულას. რა იქნება იმის ალბათობა, რომ:

- ა) ამოღებული ბურთი იქნება შავი;
- ბ) ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან წითელი;
- გ) ამოღებული ბურთი იქნება მწვანე;
- დ) ამოღებული ბურთი არ იქნება წითელი;
- ე) ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან შავი, ან წითელი.

✓ **ამოცანის მათემატიკური მოდელირება.** მოცემულ ექსპერიმენტში ურნაში დევს სულ 20 ბურთული და მათგან ვიღებთ ერთ ნებისმიერ ბურთულას, ამიტომ ელემენტარულ ხდომი-
ლობათა Ω სივრცეში იქნება 20 ელემენტი, ე.ი. $n(\Omega) = 20$. ახლა ვიპოვოთ საჭირო ალბათობები.

ა) განვიხილოთ ხდომილობა A, ამოღებული ბურთი იქნება შავი. ურნაში არის 6 შავი ბურთული და მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, ამიტომ $n(A) = 6$. შესაბამისად, A ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

ბ) განვიხილოთ ხდომილობა B, ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან წითელი. ურნაში არის 9 თეთრი და 5 წითელი ბურთული, ამიტომ მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, გვექნება $n(B) = 14$. შესაბამისად, B ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

გ) განვიხილოთ C ხდომილობა, ამოღებული ბურთი იქნება მწვანე. ურნაში მწვანე ფერის ბურთული არ არის, ამიტომ C ხდომილობის იქნება შეუძლებელი ხდომილობა და ცხადია $n(C) = 0$. შესაბამისად, A ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{0}{20} = 0$.

დ) განვიხილოთ ხდომილობა D, ამოღებული ბურთი არ იქნება წითელი. ურნაში არის 5 წითელი ბურთული, ხოლო დანარჩენი 15 ბურთული არის არაწითელი, შესაბამისად, მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, ამიტომ $n(D) = 15$. შესაბამისად, D ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

ე) განვიხილოთ ხდომილობა E, ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან შავი, ან წითელი. ცხადია, ურნიდან ნებისმიერად ამოღებული ბურთული იქნება ჩვენთვის სასურველი, რადგან ურნაში სხვა ფერის ბურთულები არ არის. ე.ი. E ხდომილობა იქნება აუცილებელი ხდომი-
ლობა და $n(E) = 20$. შესაბამისად, E ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{20}{20} = 1$.



სავარჯიშოები

1. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი ხდომილობა, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ვაგორებთ ჩვეულებრივ ერთ კამათელს და ხდომილობებია:

- A = {ლუწი რიცხვის მოსვლა};
- B = {5-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა};
- C = {დადებითი რიცხვის მოსვლა};
- D = {2-ის ჯერადი რიცხვის მოსვლა};
- E = {7-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა};
- F = {1-ზე მეტი და 4-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა}.

ბ) ერთ მონეტას ვაგდებთ ორჯერ და ხდომილობებია:

- A = {ორივეჯერ მოვა საფასური};
- B = {ერთხელ მოვა საფასური და ერთხელ გერბი};
- C = {ერთხელ მაინც მოვა საფასური};
- D = {არც ერთხელ არ მოვა გერბი};
- E = {ერთხელ მაინც მოვა ან გერბი, ან საფასური};
- F = {სამივეჯერ მოვა გერბი}.

2. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი ხდომილობა, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ურნაში დევს 5 ყვითელი, 4 შავი და 7 მწვანე ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ 4 ბურთულას. მოცემული ხდომილობებია:

- A = {ოთხივე ბურთულა მწვანეა};
- B = {ოთხივე ბურთულა სხვადასხვაფერია};
- C = {ორი ყვითელია და ორი შავი};
- D = {სამი ერთნაირი ფერისაა და მეოთხე სხვა ფერის};
- E = {ერთი ყვითელია და სამი შავი};
- F = {ერთი მაინც არის ან შავი, ან მწვანე, ან ყვითელი}.

ბ) სნაიპერი შვიდჯერ ესვრის მიზანში. მოცემული ხდომილობებია:

- A = {შვიდჯერვე მოახვედრა მიზანს};
- B = {მხოლოდ ერთხელ ააცილა მიზანს};
- C = {სამჯერ მოახვედრა მიზანს და ოთხჯერ ააცილა};
- D = {მიზანში მოხვედრათა რაოდენობა ორჯერ მეტია აცილებათა რაოდენობაზე};
- E = {პირველი სროლა მოახვედრა, ხოლო დანარჩენი ააცილა};
- F = {ხუთჯერ მოახვედრა და სამჯერ ააცილა}.

გ) ყუთში 33 ბარათია, თითოეულზე აწერია ქართული ანბანის განსხვავებული ერთი ასო. ყუთიდან ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ოთხ ბარათს და იმავე თანმიმდევრობით ვდებთ მაგიდაზე. მოცემული ხდომილობებია:

- A = {ოთხივე ასო სხვადასხვაა}.



სავარჯიშოები

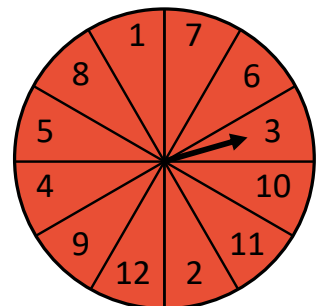
- $B = \{\text{ორი ხმოვანია და ორი თანხმოვანი}\};$
 $C = \{\text{ასოებით მიღებული სიტყვაა „გემი“}\};$
 $D = \{\text{მიიღება სახელი „კახა“}\};$
 $E = \{\text{ყველა ასო ხმოვანია}\};$
 $F = \{\text{პირველი სამი ასო თანხმოვანია, ხოლო მეოთხე ხმოვანი}\}.$

3. ქვემოთ ჩამოთვლილი ხდომილობებისათვის მოიყვანეთ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობები:
- ერთი კამათლის გაგორებისას მოვა 4-ზე პატარა რიცხვი;
 - ერთი კამათლის გაგორებისას მოვა 2-ის ჯერადი რიცხვი;
 - ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7;
 - ორი კამათლის გაგორებისას ორივეზე მოვა ლუწი რიცხვები;
 - ორი კამათლის გაგორებისას მოვა სხვადასხვა რიცხვები;
 - მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოვა ზუსტად ორი გერბი;
 - მონეტის ოთხჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა საფასური.
4. აღწერეთ ქვემოთ მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.
- ვირჩევთ ოცზე ნაკლებ ერთ ნატურალურ რიცხვს;
 - 26 ბარათიდან თითოეულს აწერია ინგლისური ანბანის განსხვავებული ერთი ასო. ამ ბარათებიდან ვირჩევთ ერთ ბარათს;
 - ვაგდებთ ორ მონეტას;
 - ვაგდებთ ერთ კამათელს და ერთ მონეტას;
 - ურნაში დევს 7 ლურჯი, 3 შინდისფერი და 4 წითელი ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ ერთ ბურთულას;
 - ერთ კამათელს ვაგდებთ სამჯერ;
 - ურნაში დევს 5 ლურჯი, 6 შინდისფერი და 3 წითელი ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ ორ ბურთულას.
5. მაგიდაზე დევს დანომრილი ოთხი ბარათი. მათი ნომრებია 1, 2, 3 და 4. შემთხვევით იღებენ ორ ბარათს. აღწერე ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.
6. მაგიდაზე დევს ხუთი დანომრილი ბარათი, რომელთა ნომრებია: 1, 2, 3, 4 და 5. ვიღებთ ერთ ბარათს, რა არის ალბათობა იმისა, რომ ჩვენ მიერ აღებულ ბარათზე იქნება:
- 3-ზე მეტი რიცხვი? გ) კენტი რიცხვი?
 - ლუწი რიცხვი? დ) 7-იანი?
7. რას უდრის ერთი ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა, თუ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება 12 ელემენტისაგან?
-  **შეგახსენებთ:** როდესაც ყოველი ხდომილობის მოსვლა თანაბარალბათურია, ეწოდება ელემენტარული ხდომილობა.
8. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე, თუ ერთი ელემენტარულ ხდომილობის ალბათობაა $\frac{1}{9}$?



სავარჯიშოები

9. აგორებენ ორ კამათელს; იპოვე შემდეგი ხდომილობების ალბათობები:
 - ა) $A = \{\text{ჯამში მოვა } 7 \text{ ქულა}\};$
 - ბ) $B = \{\text{ერთ კამათელზე იქნება ლუწი რიცხვი, ხოლო მეორე კამათელზე კენტი რიცხვი}\};$
 - გ) $C = \{\text{მოსული რიცხვების ჯამი ნაკლები იქნება } 5\text{-ზე}\};$
 - დ) $D = \{\text{ორივე გაგორებისას მოვა ერთნაირი რიცხვები}\}.$
10. ტაქსოპარკში არის 80 თეთრი და 60 ყვითელი ფერის ტაქსი. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ კლიენტის გამოძახებაზე მოვა თეთრი ტაქსი?
11. სტატისტიკური გამოკითხვის დროს ერთ-ერთი კითხვა ეხება მოქალაქის დაბადების თარიღს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ გამოკითხული ნებისმიერი ერთი მოქალაქე დაბადებული იქნება:
 - ა) თებერვლის თვეში?
 - ბ) კვირა დღეს?
 - გ) 21 რიცხვში?
12. ოლიმპიადის ფინალური ტურის მონაწილე 150 მოსწავლიდან 60 გაანაწილეს სკოლის პირველ სართულზე, ხოლო დანარჩენები – მეორე სართულზე. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამ ტურის მონაწილე ნათია მეორე სართულზე გაანაწილეს?
13. კონკურსში მონაწილე მომღერალთაგან 10 გოგონა და 12 ვაჟია. გამომსვლელთა თანმიმდევრობას აწესებენ წილისყრით. რა არის იმის ალბათობა, რომ პირველი გამომსვლელი იქნება გოგონა?
14. ურნაში 7 თეთრი, 6 წითელი და 4 ლურჯი ბურთულაა. ურნიდან იღებენ ერთ ბურთულას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:
 - ა) ამოღებული ბურთულა იქნება ლურჯი?
 - ბ) ამოღებული ბურთულა არ იქნება წითელი?
 - გ) ამოღებული ბურთულა იქნება ან თეთრი, ან ლურჯი?
 - დ) ამოღებული ბურთულა არ იქნება მწვანე?
15. ვატრიალებთ ნახაზზე მოცემულ ბზრიალას (სპინერს). რა იქნება ალბათობა იმისა, რომ:
 - ა) მოვა ერთნიშნა რიცხვი?
 - ბ) მოვა 7-ზე მეტი რიცხვი?
 - გ) მოვა 3-ის ჯერადი რიცხვი?
16. სპინერზე არის 42 ტოლი დანაყოფი, რომლებიც დანომრილია რიცხვებით: 1; 2;42. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ სპინერის დატრიალებისას მოვა:
 - ა) კენტი რიცხვი;
 - ბ) მარტივი რიცხვი;
 - გ) 5-ის ჯერადი რიცხვი;
 - დ) რიცხვი, რომლის ბოლო ციფრია 4;
 - ე) 38-ზე მეტი რიცხვი.





სავარჯიშოები

17. 36 ბანქოიანი დასტიდან ვიღებთ ერთ ბანქოს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:
- ა) ამოღებული ბანქო ტუზია?
 - ბ) ამოღებული ბანქო 8-ზე დაბალია?
 - გ) ამოღებული ბანქო ან შვიდიანია, ან მეფე?
 - დ) ამოღებული ბანქო არ არის ცხრიანი?
18. სეიფის კოდი შედგება ერთმანეთის არატოლი ოთხი ციფრისაგან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სეიფის კოდი არის კლებადობით დალაგებული ოთხი მომდევნო რიცხვი?
19. მოცემულია ორი სიმრავლე: $A = \{2; 3; 5; 6\}$ და $B = \{4; 5; 7; 8; 9\}$. შემთხვევით ირჩევენ ერთ რიცხვს A სიმრავლიდან და მეორე რიცხვს B სიმრავლიდან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ამორჩეული ორი რიცხვის ჯამი იქნება 1.
20. მწერლის ნაწარმოების 7 ტომიდან ვირჩევთ 4 ტომს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეულ ოთხ ტომში მოხვდება ნაწარმოების პირველი ტომი?
21. ლაშას ჯიბეში 5, 10, 20 და 50 თეთრიანი თითო მონეტა აქვს. იგი ჯიბიდან შემთხვევით იღებს ორ მონეტას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ მონეტათა თანხათა ჯამი იქნება 25 თეთრი?

4.2. ორი ხდომილობის ურთიერთდასაბამოობა

გაკვეთილის დაწყებამდე გაიხსენეთ მოქმედებები სიმრავლეებზე

ხდომილობათა გაერთიანება:



ნიმუშით ახსნა

დავუშვათ, ვატრიალებთ ნახატზე მოცემულ სპინერს და გვაქვს ორი შემთხვევითი ხდომილობა A და B. ვთქვათ, A ხდომილობა არის

$A = \{7\text{-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა}\} = \{8; 9; 10; 11; 12\}$,

ხოლო $B = \{ \text{ლუწი რიცხვის მოსვლა} \} = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$. ცხა-

დია, რომ $n(\Omega)=12$, $n(A)=5$ და $n(B)=6$. შესაბამისად, $P(A) = \frac{5}{12}$

და $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

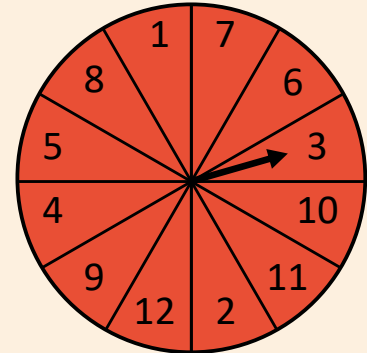
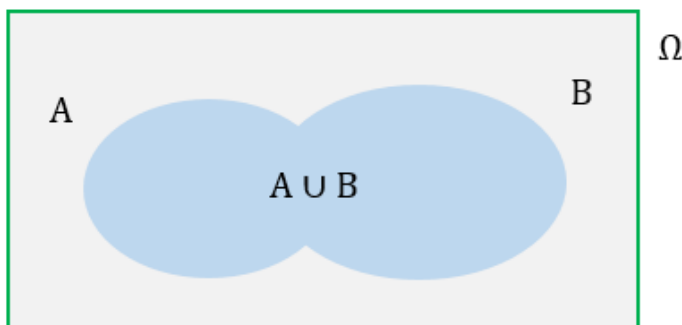
ახლა განვიხილოთ ახალი C ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება A და B ხდომილობებიდან რომელიმე მაინც, ე.ი. მოვა ლუწი, ან 7-ზე მეტი რიცხვი.

ცხადია, $C = \{2; 4; 6; 8; 9; 10; 11; 12\}$. მაშასადამე, $n(C) = 8$ და

$P(C) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

ამ ახალ C ხდომილობას უწოდებენ A და B ხდომილობების გაერთიანებას.

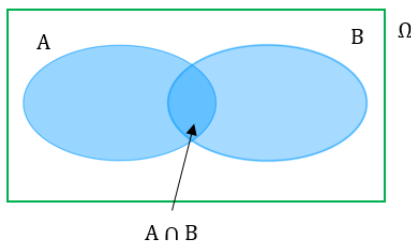
თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამების სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



A და B ხდომილობების გაერთიანება ეწოდება C ხდომილობას, რომელიც შედგება ისეთი ელემენტარული ხდომილობებისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან A და B ხდომილობებიდან ერთ-ერთს მაინც, ანუ ან A ხდომილობას, ან B ხდომილობას, ან ორივეს ერთად. A და B ხდომილობების გაერთიანება ჩაიწერება ასე: $A \cup B$.

ახლა განვიხილოთ ახალი D ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება იმ შემთხვევაში, როცა ორივე A და B ხდომილობები სრულდება ერთდროულად, ე.ი. მოვა 7-ზე მეტი ლუწი რიცხვი. ცხადია, $D = \{8; 10; 12\}$. მაშასადამე, $n(D) = 3$ და $P(D) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. ამ ახალ D ხდომილობას უწოდებენ A და B ხდომილობების თანაკვეთას.

თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამების სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



A და B ხდომილობების თანაკვეთა ეწოდება D ხდომილობას, რომელიც შედგება ისეთი ელემენტარული ხდომილობებისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან A და B ხდომილობებიდან ერთდროულად ორივეს. A და B ხდომილობების თანაკვეთა ჩაიწერება ასე: $A \cap B$.



ნიშნები 1

დავუშვათ, ვაგორებთ ორ კამათელს. გვაქვს ორი A და B შემთხვევითი ხდომილობა:

$A = \{\text{ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვი}\} = \{(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}$,

$B = \{\text{მოსული რიცხვების ჯამი ნაკლებია 5-ზე}\} = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (3;1)\}$.

ვიპოვოთ ამ ორი ხდომილობისთვის გაერთიანების და თანაკვეთის ალბათობები.

✓ **ამოცანის მათემატიკური მოდელირება.** მოცემულ ექსპერიმენტში ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება 36 წყვილისაგან, შესაბამისად $n(\Omega) = 36$. ასევე ცხადია, რომ $n(A) = 6$ და $n(B) = 6$. აქედან გამომდინარე მივიღებთ: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ და $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

ახლა ვიპოვოთ A და B შემთხვევითი ხდომილობების გაერთიანება და თანაკვეთა. ხდომილობა $A \cup B$ იქნება: ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვები, ან მათი ჯამი ნაკლებია 5-ზე. ცხადია, რომ

$A \cup B = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (3;1); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}$

ე.ი. $n(A \cup B) = 10$ და $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

ხდომილობა $A \cap B$ იქნება: ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვები, რომელთა ჯამი ნაკლებია 5-ზე. ცხადია, რომ $A \cap B = \{(1;1); (2;2)\}$.

ე.ი. $n(A \cap B) = 2$ და $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

A და მისი საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობების თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, რადგან $\bar{A}$ ხდომილობის განმარტების თანახმად მას A ხდომილობასთან საერთო ელემენტი არ გააჩნია. ე.ი. $A \cap \bar{A} = \emptyset$ და $P(A \cap \bar{A}) = 0$

ასევე, A და მისი საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობების გაერთიანება იქნება მთლიანად ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე, ე.ი. $A \cup \bar{A} = \Omega$ და $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

ორ A და B შემთხვევით ხდომილობებს ეწოდებათ **თავსებადი ხდომილობები**, თუ მათი თანაკვეთა არაა ცარიელი სიმრავლე, ანუ $A \cap B \neq \emptyset$. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამ ხდომილობებს ეწოდებათ არათავსებადი ხდომილობები, მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ე.ი. $A \cap B = \emptyset$ და $P(A \cap B) = 0$. არათავსებადი ხდომილობებისთვის გვექნება:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

დამოუკიდებელი ხდომილობები

განვიხილოთ ორი ბზრიალა A და B (ე.წ. ორი სპინერი):

A-ს აქვს 3 დანაყოფი, რომლის ფერებია: წითელი, მწვანე და ლურჯი;

B-ს აქვს 2 დანაყოფი, რომელსაც აწერია რიცხვები 1 და 2;

დავუშვათ, ორივე ბზრიალას ვატრიალებთ. რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მივიღოთ ორივეს გაჩერებისას? როგორც ვხედავთ, დიაგრამაზე, სულ არის 6 განსხვავებული ხდომილობა.

A-თი აღვნიშნოთ პირველ სპინერზე მოსული ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, ხოლო B-თი მეორე სპინერზე მოსული ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე:

$$A = \{\text{წითელი}, \text{ლურჯი}, \text{მწვანე}\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$\Omega = \{\text{წ}, 1; \text{წ}, 2; \text{ლ}, 1; \text{ლ}, 2; \text{მ}, 1; \text{მ}, 2\}$$

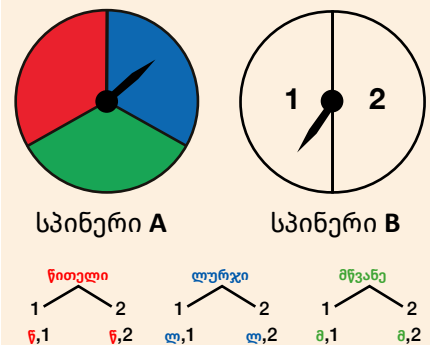
ჩვენ გვინდა განხორციელდეს რაღაც C ხდომილობა, როცა A სპინერზე მოვა კონკრეტული ფერი, ხოლო B სპინერზე მოვა კონკრეტული რიცხვი.

პირველ სპინერზე მოსული ელემენტარული ხდომილობა არ ახდენს გავლენას მეორე სპინერზე მოსულ ელემენტარულ ხდომილობაზე;

- რა არის ალბათობა იმისა, რომ სპინერების დატრიალების შედეგად მოვა მწვანე და 1?

გამომდინარე იქიდან, რომ ვიცით რომ სულ შესაძლო ვარიანტთა სიმრავლე არის 6; $P(\text{მწვანე და } 1) = \frac{1}{6}$

$$P(\text{მწვანე და } 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$



ორ A და B შემთხვევით ხდომილობას ეწოდება **დამოუკიდებელი ხდომილობები**, თუ ერთ-ერთი მათგანის განხორციელება გავლენას არ ახდენს მეორის განხორციელებაზე.

ზოგადად კი შეგვიძლია ვთქვათ, თუ რაიმე A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ შედგენილი „ A და B “ ხდომილობისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$P(A \text{ და } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

დამოუკიდებელი ხდომილობები

დავუშვათ, პარკში არის 3 ვაშლი, ორი წითელი და 1 მწვანე, პარკიდან ვიღებთ ჯერ ერთ ვაშლს, შემდეგ მეორეს; რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება წითელი?

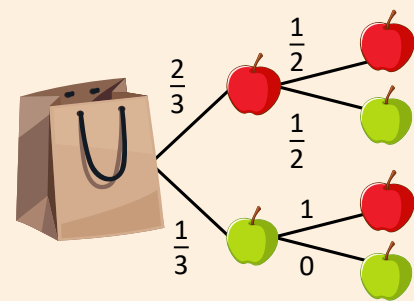
პირველად პარკიდან ვაშლის ამოღების დროს, წითელი ვაშლის ამოღების ალბათობა არის $\frac{2}{3}$, ხოლო მწვანე ვაშლის ამოღების ალბათობა $\frac{1}{3}$.

მას შემდეგ, რაც ამოვიღებთ პირველ ვაშლს, ყუთში დარჩება ორი ვაშლი; პირველი ექსპერიმენტი გავლენას ახდენს მეორეზე:

- თუ პირველად ამოვიღებთ წითელს ვაშლს, მაშინ დარჩება 2 ვაშლი, წითელი და მწვანე, თითოეულის ამოღების ალბათობაა $\frac{1}{2}$;
- ხოლო თუ პირველად ამოვიღებთ მწვანე ვაშლს, მისი ალბათობაა $\frac{1}{3}$, რის შემდეგაც პარკში დარჩება ორი ვაშლი, ორივე წითელი, შესაბამისად, წითელი ვაშლის ამოღების ალბათობაა $\frac{2}{2} = 1$, გამომდინარე იქიდან, რომ მწვანე ვაშლი აღარ დარჩა, მისი ალბათობაა 0;

ალბათობა იმისა, რომ ორივე ვაშლი იქნება წითელი არის

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$





მაგალიტი 3

პარკში არის 4 წითელი, 2 ყვითელი და 2 ლურჯი ბურთი; პარკიდან ვიღებთ ერთ ბურთს, შემდეგ მეორეს, ისე რომ პირველ ბურთს არ ვაბრუნებთ პარკში;

რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოვიღებთ ჯერ წითელ და მერე ყვითელ ბურთს?

- თუ პირველად ამოვიღებთ წითელს $P(\text{წითელი}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;
- ბურთის ამოღების შემდეგ, პარკში დარჩება 7 ბურთი, ამიტომ ყვითელი ბურთის მოსვლის ალბათობა იქნება $P(\text{წითელი}) = \frac{2}{7}$;

ალბათობა იმისა, რომ ჯერ ამოვიღებთ წითელ და შემდეგ ყვითელ ბურთს არის:

$$P(\text{წითელი}; \text{წითლის შემდეგ ყვითელი}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

როგორც ვხედავთ, მეორე ექსპერიმენტის შედეგი დამოკიდებულია პირველზე; როდესაც განვიხილავთ დამოკიდებულ ხდომილობებს, ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P(A \text{ და } B) = P(A) \cdot P(B, \text{მას შემდეგ რაც მოხდა } A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B, \text{მას შემდეგ რაც მოხდა } A)$$



დასკვნა:

თუ ჩავთვლით, რომ პირველი ექსპერიმენტის შემდეგ ბურთი უნდა დავაბრუნოთ პარკში, მაშინ მივიღებთ დამოუკიდებელ ხდომილობებს; გამოვა, რომ მეორე ექსპერიმენტის შედეგი არ არის დამოკიდებული პირველი ექსპერიმენტის შედეგებზე და მივიღებთ, რომ

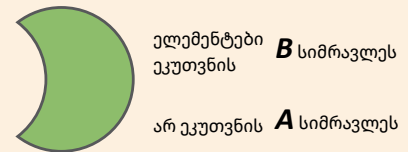
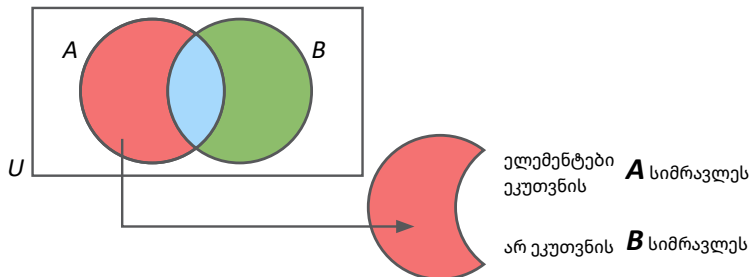
$$P(A \text{ და } B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$



***დამატებითი მასალა მათემატიკის მოყვარულთათვის**

ალბათობა და ვენის დიაგრამები

? საკვანძო კითხვა: რამდენი ელემენტია სიმრავლეში $A \cup B$? ანუ რას უდრის $n(A \cup B)$?



- $n(A) = a$ – აღნიშნავს A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას.
- $n(B) = b$ – აღნიშნავს B სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას.
- $n(A \cap B) = c$ – აღნიშნავს იმ ელემენტების რაოდენობას, რომელიც ორივე სიმრავლეს ეკუთვნის.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ სულ რამდენი ელემენტია სიმრავლეთა გაერთიანებაში, ვიყენებთ ფორმულას:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

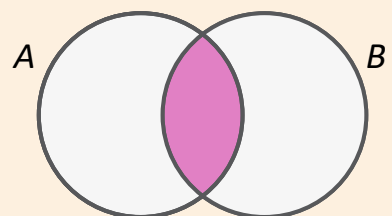
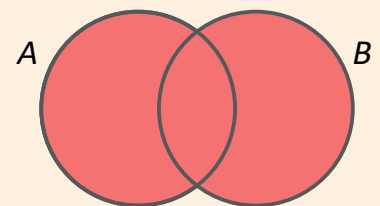
ალბათობა და ვენის დიაგრამები

- თუ A და B ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში შემავალი რაიმე ხდომილობებია, მაშინ ხდომილობა „ A ან B “ ნიშნავს, რომ ამ ხდომილობის ნებისმიერი წევრი მიეკუთვნება ერთ-ერთ მათგანს მაინც A და B ხდომილობათაგან. ხდომილობას „ A ან B “ ეწოდება: A და B **ხდომილობის გაერთიანება** და იგი ასე იწერება: $A \cup B$.
- ხდომილობა „ A და B “ ნიშნავს, რომ ამ ხდომილობის ნებისმიერი წევრი ეკუთვნის როგორც A -ს, ასევე B -ს. ხდომილობას „ A და B “ ეწოდება A და B **ხდომილობების თანაკვეთა** და იგი ასე იწერება: $A \cap B$.
- **ალბათობის შეკრების წესი.** ნებისმიერი ორი ხდომილობისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ამასთან, თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



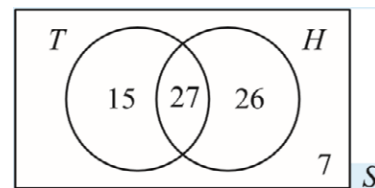
ორ A და B შემთხვევით ხდომილობას ეწოდება **დამოუკიდებელი ხდომილობები**, თუ ერთ-ერთი მათგანის განხორციელება გავლენას არ ახდენს მეორის განხორციელებაზე. დამოუკიდებელი A და B ხდომილობების ალბათობებისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. თუ ხდომილობები არაა დამოუკიდებელი, მაშინ მათ ეწოდებათ დამოკიდებული ხდომილობები:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



ნიმუში 1

მოცემული დიაგრამა გვიჩვენებს, თუ სპორტული კლუბის (S) რამდენი წევრი თამაშობს ჩოგბურთს (T) და რამდენი ჰოკეის (H).



ა) განსაზღვრე იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომელიც:

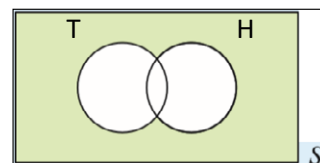
- I. სპორტულ კლუბში ირიცხება;
- II. თამაშობს ჰოკეის;
- III. სპორტის ორივე სახეობითაა დაკავებული;
- IV. ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული;
- V. ამ ორი სახეობიდან ერთ-ერთით მაინცაა დაკავებული;
- VI. დაკავებულია მხოლოდ ჩოგბურთით.

ბ) იპოვე ალბათობა იმისა, რომ კლუბიდან შემთხვევით შერჩეული სპორტსმენი:

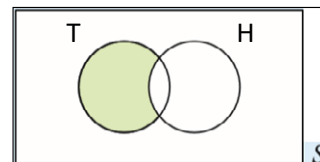
- I. ჰოკეის მოთამაშეა;
- II. ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული;
- III. ამ ორ სახეობიდან ერთ-ერთით მაინცაა დაკავებული.

ამოხსნა:

- I. $n(S) = 15 + 27 + 26 + 7 = 75$;
- II. $n(H) = 27 + 26 = 53$;
- III. $n(H \cap T) = 27$;
- IV. ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული 7 სპორტსმენი (იწერება ასე $\bar{A} \cap \bar{B}$);



- V. $n(H \cup T) = 15 + 27 + 26 = 68$;
- VI. მხოლოდ ჩოგბურთით დაკავებულია 15 სპორტსმენი.



ბ)

- I. $P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{53}{75} \approx 0.707$;
- II. $P(\bar{H} \cap \bar{T}) = \frac{n(\bar{H} \cap \bar{T})}{n(S)} = \frac{7}{75} \approx 0.093$;
- III. $P(H \cup T) = \frac{n(H \cup T)}{n(S)} = \frac{68}{75} \approx 0.907$;



ნიშნუმი 2

ლუკა და ნიკოლოზი აბარებენ მართვის მოწმობის გამოცდას. იმის ალბათობა, რომ ლუკა ჩააბარებს, არის 0.6. ალბათობა იმისა, რომ ჩააბარებს ერთ-ერთი მათგანი მაინც არის 0.7, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ჩააბარებს ორივე მათგანი, არის 0.3. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ ნიკოლოზი ჩააბარებს გამოცდას:

ჩააბარებს ლუკა – L

ჩააბარებს ნიკოლოზი – N

პირობის თანახმად,

$$P(L) = 0.6, P(L \cup N) = 0.7, P(L \cap N) = 0.3$$

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) - P(L \cap N)$$

$$0.7 = 0.6 + P(N) - 0.3$$

$$P(N) = 0.7 - 0.6 + 0.3 = 0.4$$



ნიშნუმი 3

კახა და ლევანი ისვრიან მიზანში. კახას მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,85, ხოლო ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,9. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი ბიჭი მაინც ააცილებს მიზანს:



ამოცანის მათემატიკური მოდელირება. სიმარტივისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, A ხდომილობა არის კახას მიერ მიზანში მოხვედრა, მაშინ პირობიდან გვაქვს, რომ $P(A) = 0,85$. A -ს საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობა იქნება, რომ კახა მიზანში ვერ მოარტყამს. შესაბამისად, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,85 = 0,15$.

B ხდომილობა იყოს ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრის, პირობიდან $P(B) = 0,9$. B -ს საწინააღმდეგო $\bar{B}$ ხდომილობა იქნება, რომ ლევანი მიზანში ვერ მოარტყამს.

შესაბამისად, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,9 = 0,1$.

ცხადია, რომ ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრა, ან არმოხვედრა არავითარ გავლენას არ ახდენს კახას მიერ მიზანში მოარტყმას და, პირიქით. ე.ი. A და B ხდომილობები და, შესაბამისად, $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ხდომილობები დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

ახლა გავიაზროთ რას ნიშნავს, რომ ამოცანის პირობის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ ერთ-ერთი ბიჭი მაინც ააცილებს მიზანს. ცხადია, ეს ნიშნავს, რომ $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ხდომილობებიდან უნდა განხორციელდეს ერთ-ერთი მაინც, ე.ი. უნდა ვიპოვოთ $\bar{A} \cup \bar{B}$ ხდომილობის ალბათობა. (2) ფორმულით გვექნება:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,15 + 0,1 - 0,15 \cdot 0,1 = 0,25 - 0,015 = 0,235$$



სავარჯიშოები

1. გარკვეით, თავსებადია თუ არა ქვემოთ ჩამოთვლილი A და B ხდომილობები?

ა) ვაგორებთ ერთ კამათელს:

A = {ლუწი რიცხვის მოსვლა};

B = {კენტი რიცხვის მოსვლა}.

ბ) ვაგორებთ ერთ კამათელს:

A = {ორის ჯერადი რიცხვის მოსვლა};

B = {სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლა}.

გ) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:

A = {ერთხელ მაინც მოვა საფასური};

B = {ერთხელ მაინც მოვა გერბი}.

დ) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:

A = {ზუსტად ორჯერ მოვა საფასური};

B = {ზუსტად ერთხელ მოვა გერბი}.

ე) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:

A = {ზუსტად ორჯერ მოვა გერბი};

B = {ზუსტად ორჯერ მოვა საფასური}.

ვ) ვაგორებთ ორ კამათელს:

A = {ორივეზე ჯამში 5-ზე ნაკლების მოსვლა};

B = {ორივეზე ერთნაირი რიცხვის მოსვლა}.

ზ) ვაგორებთ ორ კამათელს:

A = {ორივეზე ჯამში 9-ზე მეტის მოსვლა};

B = {ერთზე მაინც სამიანის მოსვლა}.

2. ნახაზზე მოცემულია ვენის დიაგრამა A და B ხდომილობებისათვის. გააფურადე ქვემოთ მოცემული ხდომილობის შესაბამისი არე:

ა) $\bar{A}$;

ე) $A \setminus B$;

ი) $A \cup \bar{B}$;

ბ) $\bar{B}$;

კ) $B \setminus A$;

კ) $A \cap \bar{B}$;

გ) $A \cup B$;

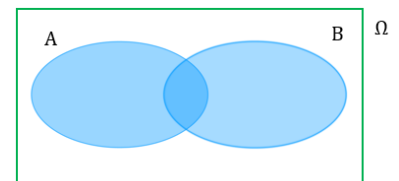
ზ) $\bar{A} \cup B$;

ლ) $\bar{A} \setminus B$;

დ) $A \cap B$;

თ) $\bar{A} \cap B$;

მ) $B \setminus \bar{A}$.



3. მოცემულია A და მისი საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობა. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია სამართლიანი?

ა) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;

ბ) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

გ) $P(\bar{A}) = \frac{1}{P(A)}$;

ბ) $P(\bar{A}) \cdot P(A) = 1$;

დ) $P(A) = \frac{1}{P(\bar{A})}$;

ვ) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

სავარჯიშოები

4. იპოვეთ:

- ა) $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა, თუ A ხდომილობის ალბათობაა 0,4;
- ბ) A ხდომილობის ალბათობაა, თუ $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა 0,57;
- გ) $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა, თუ იგი A ხდომილობის ალბათობაზე 3-ჯერ დიდია;
- დ) A ხდომილობის ალბათობაა, თუ იგი 0,4-ით ნაკლებია $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაზე;
- ე) A და მისი საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 2 : 3.

5. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:

- ა) ორი კამათლის გაგორებისას არცერთზე არ მოვა 5-იანი?
- ბ) ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 11-ზე ნაკლები?
- გ) სამი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 4-ზე მეტი?
- დ) სამი კამათლის გაგორებისას არცერთზე არ მოვა 2-იანი?
- ე) მონეტის ხუთჯერ აგდებისას არც ერთხელ არ მოვა საფასური?
- ვ) მონეტის ოთხჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა გერბი?

6. A და B არათავსებადი ხდომილობებია. ცნობილია, რომ $P(A) = 0,2$ და $P(B) = 0,45$. იპოვეთ:

- ა) $P(\bar{A})$; ბ) $P(\bar{B})$; გ) $P(A \cup B)$; დ) $P(A \cap B)$.

7. A და B არათავსებადი ხდომილობებია. ცნობილია, რომ $P(A) = 0,3$ და $P(A \cup B) = 0,45$. იპოვეთ:

- ა) $P(\bar{A})$; ბ) $P(B)$; გ) $P(\bar{B})$; დ) $P(A \cap B)$.

8. „სამართლიანი კამათელი“ გააგორეს ერთხელ. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ გაგორდება:

- ა) „3“ ან „5“;
- ბ) უარყოფითი რიცხვი;
- გ) „9“;
- დ) „4“-ზე ნაკლები რიცხვი;
- ე) „5“-ისგან განსხვავებული რიცხვი.

9. წესიერი ოქტაედრის მქონე კამათელი, რომლის წახნაგები გადანომრილია 1-დან 8-ის ჩათვლით, გააგორეს ერთხელ. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ გაგორდება:

- ა) „4“; ბ) „5“-ზე ნაკლები რიცხვი;
- გ) არანაკლებ „8“; დ) „2“-სა და „5“-ს შორის რაიმე რიცხვი 2-დან 5-მდე.



10. ტომარაში მოთავსებულია ერთნაირი ზომის 4 წითელი და 3 მწვანე ბურთულა. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ ტომრიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთულა არის:

- ა) წითელი; ბ) მწვანე;
- გ) წითელი ან მწვანე; დ) წითელი და მწვანე.

11. ბანქოსგან შემდგარი დასტა თანაბრად გადაშალეს და შემდეგ შემთხვევითად შერჩეული ერთი ბანქო ამოწიეს ზემოთ ისე, როგორც ეს სურათზეა ნაჩვენები. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ ამოწეული ბანქო:



სავარჯიშოები

- ა) ვალეტია; გ) შავი ფერის ბანქოა; ე) აგურის ტუზია;
ბ) არაა ვალეტი; დ) აგურია; ვ) აგურია ან ტუზია.

12. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ქუჩაში შემთხვევით შერჩულ ადამიანს დაბადების დღე აქვს:

- ა) მაისში;
ბ) ივნისში;
გ) მაისში ან ივნისში.

13. ერთი მონეტა ააგდეს სამჯერ ზედიზედ. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ დაფიქსირდება შემდეგთა შემდეგი თანმიმდევრობა:

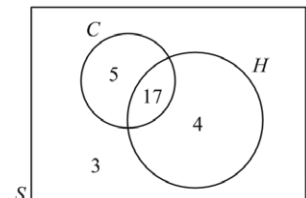
- ა) გერბი, გერბი, გერბი;
ბ) საფასური, გერბი, საფასური.

14. ორი მსროლელი ერთდროულად ესვრის მიზანში. ირაკლი მიზანს არტყამს 70% სიზუსტით, ხოლო ბექა 80% სიზუსტით. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ:

- ა) ორივე მათგანი მოახვედრებს მიზანს;
ბ) ორივე მათგანი ააცილებს მიზანს;
გ) ირაკლი მოახვედრებს, მაგრამ ბექა ააცილებს;
დ) ბექა მოახვედრებს, მაგრამ ირაკლი ააცილებს.

15. მოცემულ დიაგრამაზე წარმოდგენილია S კლასის მოსწავლეებიდან რამდენი სწავლობს ქიმიას (C) და ისტორიას (H). გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ კლასიდან შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე:

- ა) სწავლობს ამ ორივე საგანს;
ბ) სწავლობს ამ ორიდან ერთ-ერთ საგანს მაინც;
გ) სწავლობს მხოლოდ ქიმიას;
დ) არ სწავლობს ამ ორიდან არც ერთ საგანს.



16. კამათელს ვაგორებთ ორჯერ. გამოთვალეთ:

- ა) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა 3-ზე ნაკლები ან 10-ზე მეტი ქულა?
ბ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა ან 5 ქულა, ან 9 ქულა?
გ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ პირველ ვაგორებაზე მოვა 4-ზე მეტი ქულა, ხოლო მეორე ვაგორებაზე მოვა 3-ზე ნაკლები ქულა?
დ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ერთხელ მაინც მოვა 6 ქულა?

17. სპინერზე არის 32 ტოლი დანაყოფი, რომლებიც დანომრილია რიცხვებით: 1; 2;32. თუ სპინერი დაატრიალეს ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

- ა) ორივეჯერ მოვა კენტი რიცხვი.
ბ) ორივეჯერ არ მოვა მარტივი რიცხვი.
გ) პირველად მოვა 10-ზე ნაკლები რიცხვი, ხოლო მეორეჯერ 25-ზე მეტი რიცხვი.
დ) რიცხვი, რომლის ბოლო ციფრია 4.

სავარჯიშოები

18. მაგიდაზე დევს ხუთი დანომრილი ბარათი, რომელთა ნომრებია: 1, 2, 3, 4 და 5. თანმიმდევრობით, ისე რომ ნომრებს ვერ ხედავენ, იღებენ ერთ ბარათს, იწერენ მასზე აღნიშნულ ციფრს და ბარათს უკან დებენ. შემდეგ იღებენ ისევ ერთ ბარათს და მასზე აღნიშნულ ციფრს მარჯვნიდან მიუწერენ პირველად დაწერილ ციფრს, ასე მიიღებენ ორნიშნა რიცხვს. აღწერე ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.
19. ურნაში 8 წითელი და 7 ყვითელი ბურთულაა. ურნიდან თანმიმდევრობით იღებენ ორ ბურთულას (უკან დაბრუნების გარეშე). რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:
- პირველი ამოღებული ბურთი წითელი იყოს?
 - ორივე ამოღებული ბურთი წითელი იყოს?
 - პირველი ამოღებული ბურთი წითელი იყოს, ხოლო მეორე ყვითელი?
 - ორივე ამოღებული ბურთი ყვითელი იყოს?
20. ურნაში მოთავსებულია ცხრა ბურთულა, რომლებიც გადანომრილია ციფრებით 1-დან 9-მდე. კახა იღებს ურნიდან ერთ ბურთულას, ინიშნავს შესაბამის რიცხვს და ბურთულას უკან ურნაში აბრუნებს. შემდეგ ურნიდან ბურთულას იღებს თამუნა. რა არის იმის ალბათობა, რომ:
- კახაც და თამუნაც ამოიღებენ ლუწ რიცხვს;
 - კახაც და თამუნაც ამოიღებენ კენტ რიცხვს;
 - კახა ამოიღებს 7-ზე მეტ რიცხვს, ხოლო თამუნა ამოიღებს 4-ზე ნაკლებ რიცხვს;
 - ორივეს ჯამში ექნება 16.
21. ჩოგბურთელი ორ ტურნირში მონაწილეობს. ერთ ტურნირში მისი გამარჯვების ალბათობაა 0,8, ხოლო მეორეში, პირველი ტურნირის შედეგისგან დამოუკიდებლად, მისი გამარჯვების ალბათობაა 0,75. გამოთვალე იმის ალბათობა, რომ:
- ჩოგბურთელი ორივე ტურნირში გაიმარჯვებს;
 - ჩოგბურთელი ვერცერთ ტურნირში ვერ გაიმარჯვებს;
 - ჩოგბურთელი მხოლოდ ერთ ტურნირში გაიმარჯვებს.
22. გვანცა და ბექა თანაკლასელები არიან. მათ კლასში 20 მოსწავლეა. მასწავლებელმა მათემატიკის შემაჯამებელი წერისთვის კლასი გაყო ორ ტოლ ჯგუფად. რა არის იმის ალბათობა, რომ გვანცა და ბექა ერთ ჯგუფში მოხვდნენ?
23. ნიკა და ნანა და-ძმანი არიან. მათი ტურისტული ჯგუფი, რომელშიც 24 წევრია, გაემგზავრა საფრანგეთში პარიზის დასათვალიერებლად. ერთ-ერთ ექსკურსიაზე ჯგუფი თანაბრად უნდა განაწილდეს სამ მარშრუტზე. რა არის იმის ალბათობა, რომ ნიკა და ნანა ერთ მარშრუტზე მოხვდებიან?
24.  **გამოწვევა:** ჯგუფის 25 სტუდენტიდან 9 სტუდენტმა ფიზიკის შემაჯამებელ წერაში მიიღო უმაღლესი შეფასება, ხოლო 8 სტუდენტმა – მათემატიკის შემაჯამებელ წერაში. ამასთან, აღმოჩნდა 5 სტუდენტი, რომლებმაც ორივე წერაში უმაღლესი შეფასება დაიმსახურეს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამ ჯგუფის შემთხვევით შერჩეულმა სტუდენტმა:
- ერთ წერაში მაინც მიიღო უმაღლესი შეფასება?
 - უმაღლესი შეფასება არცერთ წერაში არ მიიღო?



სავარჯიშოები

25. ჯგუფის 30 სტუდენტიდან 14 სტუდენტს ჰყავს და, 19 სტუდენტს ჰყავს ძმა, ხოლო 7 სტუდენტს, არც და ჰყავს და არც ძმა. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამ ჯგუფიდან შემთხვევით შერჩეულ სტუდენტს:
- ჰყავს დედამამიშვილი?
 - არ ჰყავს არც და არც ძმა?
26. კახას სურს აიღოს მანქანის მართვის მოწმობა, რისთვისაც მან აუცილებლად უნდა ჩააბაროს ორი გამოცდა, თეორიული და პრაქტიკული. ალბათობა იმისა, რომ კახა ჩააბარებს თეორიულ გამოცდას არის 0,85, ხოლო პრაქტიკული გამოცდის ჩაბარების ალბათობაა 0,65. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კახა აიღებს მართვის მოწმობას.
27. **გამოწვევა:** მონეტას აგდებენ სამჯერ. გამოთვალეთ:
- რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მხოლოდ ერთხელ მოვა საფასური?
 - რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ერთხელ მაინც მოვა გერბი?
 - რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ან პირველი აგდებისას მოვა გერბი, ან მესამე აგდებისას მოვა გერბი?
28. **გამოწვევა:** კამათელს ვაგორებთ ორჯერ. გამოთვალეთ:
- რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ორივეჯერ მოვა 2 ქულა?
 - რას უდრის იმის ალბათობა, რომ არც ერთხელ არ მოვა 5 ქულა?
 - რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მხოლოდ ერთხელ მოვა 3 ქულა?
29. **გამოწვევა:** ყუთში 30 ბურთია, მათგან ზოგი არის შავი და ზოგი არის თეთრი. რამდენი თეთრი და რამდენი შავი ბურთია ყუთში, თუ ალბათობა იმისა, რომ ორი ამოღებული ბურთიდან ორივე იქნება შავი ფერის, არის $\frac{13}{29}$?
30. **გამოწვევა:** კლასში 20 მოსწავლეა, მათგან მორიგეობისთვის უნდა შეირჩეს 2 მოსწავლე. ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ორი მოსწავლიდან ერთი იქნება ბიჭი და ერთი იქნება გოგო, არის $\frac{48}{95}$. რამდენი ბიჭი და რამდენი გოგოა კლასში?
31. **გამოწვევა:** მსროლელი 4-ჯერ ესვრის მიზანს. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,9. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:
- ყველას ააცილებს;
 - პირველს მოახვედრებს, ხოლო დანარჩენს ააცილებს;
 - მხოლოდ ერთხელ მოახვედრებს;
 - მხოლოდ ორჯერ მოახვედრებს.

სტატისტიკა

- პირველი არხი, & საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტრო. (2020). პირველი არხი ტელესკოლა - YouTube. [Www.youtube.com. https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv](https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv)
- საქსტატი. (2020). სტატისტიკა ბავშვებისა და მოზარდებისთვის. Juniors.geostat.ge. <http://juniors.geostat.ge/teen-stat/my-country>
- AgroNews. (2017). ნიადაგის ეროზია და მის საწინააღმდეგო ღონისძიებები /რეკომენდაცია. AgroNews.ge. <https://agronews.ge/niadagis-erozia-da-mis-satsinaaghmdego-ghonisdziebebi-rekomendatsia/>
- Dabrundashvili, N. (2019, March 11). 19) Forms კითხვარის შექმნა. [Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=CJSMRooz4Mc&list=PLPRuo4LKS8m24FSZ9isTSEaTyLzXufUbZ&index=3](https://www.youtube.com/watch?v=CJSMRooz4Mc&list=PLPRuo4LKS8m24FSZ9isTSEaTyLzXufUbZ&index=3)
- Datukishvili, G. (2017). დიაგრამები - გრაფიკები - წრიული Excel 2016 Pie chart. [Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=yFzHL_bhPCs](https://www.youtube.com/watch?v=yFzHL_bhPCs)
- Desmos. (2023). Desmos.com. <https://www.desmos.com/>
- Mathigon. (2022). Polypad – Virtual Manipulatives. Mathigon. <https://mathigon.org/polypad#random>
- Sciencemuseum. (2018). Florence Nightingale: The pioneer statistician. Science Museum. <https://www.sciencemuseum.org.uk/objects-and-stories/florence-nightingale-pioneer-statistician>
- Tsertsvadze, K. (2022). ექსელში სვეტოვანი დიაგრამის აგება. [Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=rE47AT-OPos](https://www.youtube.com/watch?v=rE47AT-OPos)
- Tsertsvadze, K. (2022). პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი. [Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=jeCyh0EI4h4](https://www.youtube.com/watch?v=jeCyh0EI4h4)